

Queste note sono una introduzione elementare ai seguenti argomenti :

1. Probabilità e matrici aleatorie .
2. Group weight, diagrammatica, gli sviluppi topologici
3. Soluzione del modello una matrice per $N \rightarrow \infty$
4. Un po' di calculus.

1 Probabilità e matrici aleatorie.

Probabilità

Consideriamo una variabile aleatoria \mathbf{X} che può assumere un numero discreto finito o infinito numerabile di valori reali x_j . Indichiamo con $f_{\mathbf{X}}(x_j)$ la probabilità che \mathbf{X} assuma il valore x_j , ovvero $P(\mathbf{X} = x_j) = f_{\mathbf{X}}(x_j)$. Si ha quindi $0 \leq f_{\mathbf{X}}(x_j) \leq 1$ per ogni x_j e $\sum_j f_{\mathbf{X}}(x_j) = 1$.

Consideriamo ora una variabile aleatoria \mathbf{X} che assume valori reali continui. La probabilità che essa assuma valori nell'intervallo infinitesimo $(x, x + dx)$ è data dalla **densità di probabilità** $f_{\mathbf{X}}(x)$

$$P(\mathbf{X} \in (x, x + dx)) = f_{\mathbf{X}}(x) dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x) dx = 1 \quad (1.1)$$

$f_{\mathbf{X}}(x)$ è una funzione (o una distribuzione : può contenere delta di Dirac) non-negativa per ogni valore $x \in R$ ed è normalizzata ad uno.

La sua trasformata di Fourier $\tilde{f}_{\mathbf{X}}(t)$ viene chiamata la **funzione caratteristica**. Essa è il valore di aspettazione della variabile aleatoria $e^{it\mathbf{X}}$ ed è una funzione generatrice dei momenti della densità

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\mathbf{X}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\mathbf{X}}(x) dx = E(e^{it\mathbf{X}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E(\mathbf{X}^n) \quad , \\ E(\mathbf{X}^n) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_{\mathbf{X}}(x) dx = (-i)^n \tilde{f}_{\mathbf{X}}^{(n)}(0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Un insieme di k variabili aleatorie \mathbf{X}_j , $j = 1, 2, \dots, k$, è completamente descritto dalla **densità congiunta di probabilità** $f_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ che

esprime la probabilita'

$$P\left(\mathbf{X}_1 \in (x_1, x_1 + dx_1), \dots, \mathbf{X}_k \in (x_k, x_k + dx_k)\right) = f_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = 1 \quad (1.3)$$

Integrando su tutti i valori delle $k - 1$ variabili x_2, x_3, \dots, x_k si ottiene la densita' marginale $f_{\mathbf{X}_1}(x_1)$ che esprime la probabilita' che \mathbf{X}_1 abbia il valore x_1 indipendentemente dai valori delle altre variabili aleatorie.

$$f_{\mathbf{X}_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k \quad (1.4)$$

Nello stesso modo si ottengono le altre densita' marginali $f_{\mathbf{X}_2}(x_2), \dots, f_{\mathbf{X}_k}(x_k)$.

Definizione. Le variabili aleatorie $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$ sono **indipendenti** se e solo se la densita' congiunta e' uguale al prodotto delle densita' marginali :

$$f_{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = f_{\mathbf{X}_1}(x_1) \cdot f_{\mathbf{X}_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{\mathbf{X}_k}(x_k).$$

matrici aleatorie [1]

Esempio 1. Consideriamo una matrice reale simmetrica di ordine 2

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Le entrate x, y, z sono possibili valori reali delle tre variabili aleatorie $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ e sia $f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}}(x, y, z)$ la densita' congiunta di probabilita'. La matrice M e' una particolare collezione di variabili aleatorie e viene detta matrice aleatoria.

La conoscenza della densita' congiunta consente di valutare qualunque probabilita' delle variabili aleatorie $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ o di funzioni di esse. Per esempio si puo' valutare la densita' delle variabili aleatorie $\det M$, $\text{tr} M$, $\text{tr}(M^2)$ oppure valutare la probabilita' che un autovalore della matrice M sia compreso nell'intervallo (a, b) , oppure la probabilita' che la differenza dei due autovalori sia maggiore di un numero reale pre-assegnato. Vedi Esercizio 1.1.

Potremmo considerare le seguenti due variabili aleatorie $\text{tr}(e^{itM})$, $e^{it \text{tr} M}$; il loro valore di aspettazione corrisponde a generalizzazioni matriciali della funzione caratteristica

$$\text{tr}(e^{itM}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \text{tr}(M^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} (\lambda_1^n + \lambda_2^n) \quad ,$$

$$e^{it \text{tr} M} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} (\text{tr} M)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n \quad ,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{x + z \mp \sqrt{(x - z)^2 + 4y^2}}{2} \quad (1.6)$$

I fisici usano piu' frequentemente un'altra funzione generatrice $G(z)$, spesso chiamata funzione di Green o **risolvente**

$$G(z) \stackrel{\text{def}}{=} E \left(\text{tr} \frac{1}{z-M} \right) \quad , \quad z \text{ complesso } \text{Im } z \neq 0 \quad (1.7)$$

Poiche' $\text{tr} \frac{1}{z-M} = \sum_i \frac{1}{z-\lambda_i}$ per una fissata matrice M , $\text{tr} \frac{1}{z-M}$ e' una funzione meromorfa con n poli semplici sull'asse reale (usualmente possiamo trascurare il caso di autovalori coincidenti ¹). Prendendo il valore di aspettazione, cioe' mediando sulla densita' congiunta di probabilita' degli autovalori, $G(z)$ nei casi piu' semplici risulta una funzione di variabile complessa con un taglio su un segmento dell'asse reale. Usando la nota identita' $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \frac{1}{x+i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = -\pi \delta(x)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \text{Im } G(x+i\epsilon) &= E \left(\text{Im} \sum_i \frac{1}{x+i\epsilon-\lambda_i} \right) = -\pi E \left(\sum_i \delta(x-\lambda_i) \right) = -\pi \rho(x) \\ \text{dove } \rho(x) &\stackrel{\text{def}}{=} E \left(\sum_{i=1}^n \delta(x-\lambda_i) \right) \quad , \quad \int dx \rho(x) = n \end{aligned} \quad (1.8)$$

e' chiamata la densita' degli autovalori o densita' spettrale.

Supponiamo inoltre che la densita' congiunta di probabilita' $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}}(x,y,z)$ sia funzione solo dei due autovalori λ_1, λ_2 ; $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}}(x,y,z) = h(\lambda_1, \lambda_2)$. Tutte le quantita' di interesse precedentemente indicate sono pure funzione degli autovalori. In questo caso e' conveniente determinare la densita' congiunta di probabilita' $f_{\lambda_1, \lambda_2}(t_1, t_2)$ degli autovalori.

$$\begin{aligned} f_{\lambda_1, \lambda_2}(t_1, t_2) &= \iiint f_{\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}}(x,y,z) \delta \left(t_1 - \frac{x+z-\sqrt{(x-z)^2+4y^2}}{2} \right) \\ &\quad \delta \left(t_2 - \frac{x+z+\sqrt{(x-z)^2+4y^2}}{2} \right) dx dy dz = \\ &= h(t_1, t_2) \iiint \delta \left(t_1 - \frac{x+z-\sqrt{(x-z)^2+4y^2}}{2} \right) \\ &\quad \delta \left(t_2 - \frac{x+z+\sqrt{(x-z)^2+4y^2}}{2} \right) dx dy dz = \\ &= \pi h(t_1, t_2) |t_2 - t_1| \end{aligned} \quad (1.9)$$

La valutazione dell'integrale si trova nell'esercizio 1.2.

¹L'insieme delle matrici Hermitiane di ordine n con autovalori tutti distinti e' un sottoinsieme aperto denso nell'insieme di tutte le matrici Hermitiane di ordine n .

Esempio 2. Consideriamo la matrice Hermitiana H di ordine n

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Le entrate della matrice sono data da n^2 numeri reali, h_{jj} , $j = 1, \dots, n$, $\text{Re } h_{ij}$ e $\text{Im } h_{ij}$ con $1 \leq i < j \leq n$.

$$\text{Tr}(H^2) = \text{tr}(HH^\dagger) = \sum_{j=1}^n (h_{jj})^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left((\text{Re } h_{ij})^2 + (\text{Im } h_{ij})^2 \right).$$

$$\mathcal{D}H \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n dh_{jj} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(d\text{Re } h_{ij} d\text{Im } h_{ij} \right).$$

E' utile considerare lo spazio di Hilbert \mathcal{H}_n , di dimensione finita n^2 delle matrici hermitiane di ordine n con il prodotto scalare $(H_1, H_2)_{\mathcal{H}} = \text{tr}(H_1 H_2)$, vedi eserc.1.3.

Si puo' definire una base di generatori T^a , $a = 1, 2, \dots, n^2 - 1$, matrici Hermitiane di ordine n , a traccia nulla, tali che per ogni $H \in \mathcal{H}_n$

$$H - \frac{\text{tr}H}{n}I = \sum_{a=1}^{n^2-1} H^a T^a \quad , \quad \text{tr } T^a = 0 \quad , \quad \text{tr}(T^a T^b) = \delta_{ab} \quad \text{ortogonalita' } ,$$

$$[T^a, T^b] = \sum_{c=1}^n i f^{abc} T^c \quad , \quad \text{algebra di Lie dei generatori}$$

f^{abc} tensore reale totalmente antisimmetrico ,

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} (T^a)_{ij} (T^a)_{kl} = \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad \text{completezza} \quad (1.11)$$

Chiameremo $H^a = \text{tr}(HT^a)$ le $n^2 - 1$ componenti (reali) di H . Le matrici T^a sono i generatori del gruppo $SU(n)$: ogni matrice unitaria U con $\det U = 1$ puo' essere rappresentata come $U = e^{i \sum_r c_r T^r}$.

Se si aggiunge all'insieme dei generatori T^a un nuovo generatore proporzionale all'identita', spesso indicato con T^0 , si ottiene un insieme di n^2 generatori del gruppo $U(n) = SU(n) \times U(1)$.

Scegliendo $T^0 = \frac{1}{\sqrt{n}}I$ la relazione di ortogonalita' non viene modificata e quella di completezza diviene

$$\sum_{a=0}^{n^2-1} (T^a)_{ij} (T^a)_{kl} = \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.12)$$

Consideriamo un integrale del tipo

$$\langle \text{tr} H^4 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}H \text{tr} H^4 e^{-\text{tr} H^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}H e^{-\text{tr} H^2}} \quad (1.13)$$

E' istruttivo valutare questo integrale in tre diversi modi.

Primo modo. Esprimo la generica matrice H sui campi componenti, $\text{tr} H^2 = \sum_{a=0}^{n^2-1} (H^a)^2$, $\mathcal{D}H = \prod_{a=0}^{n^2-1} dH^a$, $\text{tr} H^4 = \sum_{abcd} \text{tr}(T^a T^b T^c T^d) H^a H^b H^c H^d$.

$$\begin{aligned} \langle \text{tr} H^4 \rangle &= \frac{\sum_{abcd} \text{tr}(T^a T^b T^c T^d) \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{a=0}^{n^2-1} dH^a \right) H^a H^b H^c H^d e^{-\sum_r (H^r)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{a=0}^{n^2-1} dH^a e^{-\sum_r (H^r)^2}} = \\ &= \sum_{abcd} \text{tr}(T^a T^b T^c T^d) \left(\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc} \right) \frac{1}{4} = \frac{n(2n^2 + 1)}{4} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Nell'ultima riga ho utilizzato la relazione di completezza (1.12), per cui $\text{tr}(T^a T^a T^c T^c) = n^3$, $\text{tr}(T^a T^b T^a T^b) = n$.

Secondo modo. In modo analogo allo sviluppo perturbativo nella teoria dei campi, valutiamo dapprima il propagatore $\langle h_{ij} h_{kl} \rangle = \langle h_{ij} (h_{lk})^* \rangle$ esprimendo l'integrando e la misura in termini delle n^2 variabili reali indipendenti

$$\langle h_{ij} h_{kl} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}H h_{ij} h_{kl} e^{-\text{tr} H^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}H e^{-\text{tr} H^2}} = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.15)$$

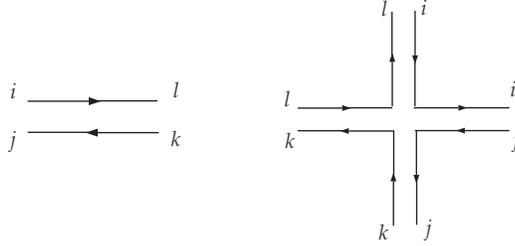


Fig.1

Quindi utilizziamo il teorema di Wick : il vertice $\text{tr} H^4 = \sum_{ijkl=1}^n h_{ij} h_{jk} h_{kl} h_{li}$ viene "contratto" da due propagatori nei 3 possibili modi, ottenendo i 3 grafi di Feynman in Fig.2

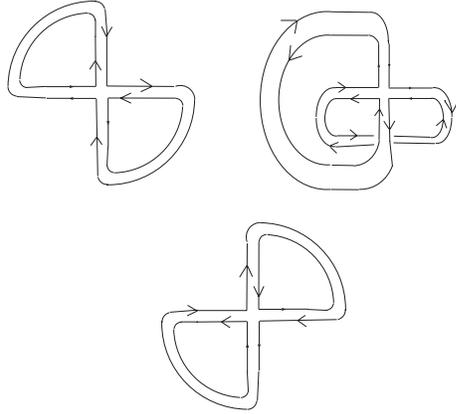


Fig.2

In questi grafi a doppia linea (detti ribbon graphs oppure fat graphs) ogni linea singola e' associata ad un indice $j = 1, \dots, n$. Una linea chiusa corrisponde a $\sum_j \delta_{jj} = n$. Quindi i due grafi planari contribuiscono ciascuno $n^3/4$ mentre il grafo non-planare ha una sola linea che lo percorre interamente e contribuisce $n/4$, ottenendo cosi' il risultato (1.14).

Terzo modo. Questo modo e' certamente non conveniente in questo caso, ma illustra la tecnica dei polinomi ortogonali, che e' di grande utilita'. Gli integrandi in equaz.(1.13) sono invarianti sotto la trasformazione unitaria che diagonalizza la matrice Hermitiana H , $H = U \Lambda U^{-1}$. La matrice diagonale Λ e' definita da n numeri reali λ_i . La generica matrice unitaria U di ordine n e' definita da n^2 numeri reali, ma nella diagonalizzazione $H = U \Lambda U^{-1}$ la matrice U e' definita a meno di una moltiplicazione per una matrice diagonale, $U_{\text{diag.}} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$. Quindi la matrice U e' definita da $n^2 - n$ numeri reali. Effettuando il cambiamento di variabili ²

²L'equazione (1.16) e' importante, ma la dimostrazione e' un po' laboriosa, vedi il cap.3 del testo di M.L.Mehta [1].

Nelle lezioni pubblicate da D.J.Gross, T.Piran, S.Weinberg, *Two dimensional quantum gravity and random surfaces* (1992), World Scientific, si trova il seguente argomento euristico fornito da E.Brézin. Lo Jacobiano $J(\lambda)$ del cambiamento di variabili (1.16) e' invariante per una permutazione degli autovalori λ_i perché una permutazione e' una matrice unitaria ; inoltre $J(\lambda)$ e' nullo se e solo se due o più autovalori sono uguali. Queste condizioni suggeriscono che $J(\lambda)$ sia proporzionale a $\prod_{1 \leq i < j \leq n} |(\lambda_i - \lambda_j)|^p$ dove p e' una opportuna potenza. Una trasformazione che riscalda tutti gli elementi della matrice Hermitiana mostra che $p = 2$. Questo argomento si trova anche nella monografia di A.Zee, citata nella nota 5 .

Una determinazione dello Jacobiano (1.16) basata sull'invarianza della lunghezza di linea nello spazio \mathcal{H}_n e' descritta nell'appendice C della review di P.Di Francesco, P.Ginsparg, J.Zinn-Justin [1].

$$\mathcal{D}H = \mathcal{D}U \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{k=1}^n d\lambda_k \quad (1.16)$$

si ottiene la densita' di probabilita' congiunta degli autovalori $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{C_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^2} = \frac{1}{C_n} \Delta^2(\lambda) e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^2} \quad ,$$

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2(\lambda) e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^2} \prod_{i=1}^n d\lambda_i = \frac{(\pi)^{n/2}}{2^{n(n-1)/2}} \prod_{r=1}^n r! \quad (1.17)$$

L'integrale sulle variabili $\mathcal{D}U$ fattorizza e si semplifica nell'equaz.(1.13) ottenendo

$$\langle \text{tr} H^4 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n d\lambda_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^4 \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n d\lambda_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^2}} \quad (1.18)$$

Il fattore $\Delta(\lambda)$, detto determinante di Vandermonde, ha una particolare importanza.

$$\Delta(\lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Quest'ultima uguaglianza si giustifica osservando che il determinante e' un polinomio di grado $n - 1$ in ciascuna variabile λ_k , completamente antisimmetrico nello scambio di una coppia (λ_a, λ_b) , con gli stessi zeri del polinomio $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$.

La riga j -esima del determinante e' il vettore riga $(\lambda_1^{j-1}, \lambda_2^{j-1}, \dots, \lambda_n^{j-1})$. Se ad essa viene sommata una arbitraria combinazione lineare delle righe precedenti, il valore del determinante non cambia. Percio' in qualunque riga, il vettore $(\lambda_1^{j-1}, \lambda_2^{j-1}, \dots, \lambda_n^{j-1})$ puo' essere sostituito dal vettore riga

$(P_{j-1}(\lambda_1), P_{j-1}(\lambda_2), \dots, P_{j-1}(\lambda_n))$ dove $P_k(x)$ e' un arbitrario polinomio in x di grado k in cui il coefficiente del monomio di grado massimo e' 1. Tali polinomi sono detti monici.

Utilizzando l'identita' $\Delta(\lambda) = \det[\lambda_i^{j-1}] = \det[P_{j-1}(\lambda_i)]$ con polinomi monici ortogonali rispetto ad una opportuna misura, gli integrali in equaz.(1.18) fattorizzano e conducono al risultato precedente (1.14), vedi esercizio 1.4.

Esercizi.

Esercizio 1.1. Supponiamo che le tre variabili aleatorie $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ nelle entrate della matrice M in equaz.(1.5) siano indipendenti, e possano assumere solo i valori ± 1 con uguale probabilita'. Useremo allora somme in luogo di integrali. Le densita' di probabilita' (discreta) sono

$$f_X(x) = \frac{1}{2}(\delta_{x,-1} + \delta_{x,1}) \quad , \quad f_Y(y) = \frac{1}{2}(\delta_{y,-1} + \delta_{y,1}) \quad , \quad f_Z(z) = \frac{1}{2}(\delta_{z,-1} + \delta_{z,1}) \quad ,$$

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}}(x,y,z) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z) \quad (1.20)$$

In questo caso la variabile aleatoria \mathbf{X}^n se n e' intero pari e' una variabile certa, assume il valore 1 con probabilita' uno; mentre se n e' dispari $\mathbf{X}^n = \mathbf{X}$. Similmente le altre due variabili aleatorie.

Chiamiamo $\mathbf{D} = \det M = \mathbf{XZ} - \mathbf{Y}^2 = \mathbf{XZ} - 1$, la variabile aleatoria determinante della matrice M . Poiche' \mathbf{XZ} assume il valore $+1$ nella meta' dei casi ed il valore -1 nell'altra meta' dei casi possibili, la densita' (discreta) della variabile aleatoria \mathbf{D} e' $f_{\mathbf{D}}(k) = \frac{1}{2}(\delta_{k,0} + \delta_{k,-2})$.

Il valore di aspettazione $E(\mathbf{D})$ usualmente indicato dai fisici $\langle D \rangle = \langle \det M \rangle$ e' uguale a -1 , la varianza $\text{Var}(\mathbf{D}) = \sigma_D^2 = \langle D^2 \rangle - \langle D \rangle^2 = 2 - 1 = 1$.

Analogamente, chiamiamo \mathbf{T} la variabile aleatoria $\mathbf{T} = \text{tr}M = \mathbf{X} + \mathbf{Z}$. Verificare che $f_{\mathbf{T}}(k) = \frac{1}{4}\delta_{k,-2} + \frac{1}{2}\delta_{k,0} + \frac{1}{4}\delta_{k,2}$ ed inoltre

$$\langle e^{it \text{tr}M} \rangle = \langle e^{it(\mathbf{X}+\mathbf{Z})} \rangle = \sum_{k=-2,0,2} e^{itk} f_{\mathbf{T}}(k) = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

Quindi $\langle (\text{tr}M)^n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 2^{n-1} & \text{se } n = 2, 4, \dots \end{cases}$.

Si poteva pervenire a questo risultato notando che $(\mathbf{X} + \mathbf{Z})^n = \begin{cases} 2^{n-1}(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) & \text{se } n \text{ dispari} \\ 2^{n-1}(1 + \mathbf{XZ}) & \text{se } n = 2, 4, \dots \end{cases}$, e quindi

$$e^{it \text{tr}M} = e^{it(\mathbf{X}+\mathbf{Z})} = 1 + (1 + \mathbf{XZ}) \frac{-1 + \cos 2t}{2} + i(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) \frac{\sin 2t}{2} \quad (1.21)$$

Prendendo ora il valore di aspettazione dell'equaz.(1.21) si ottengono le valutazioni precedenti.

Esercizio 1.2. L'integrale in equaz.(1.9) e'

$$I = \iiint \delta\left(t_1 - \frac{x+z - \sqrt{(x-z)^2 + 4y^2}}{2}\right) \delta\left(t_2 - \frac{x+z + \sqrt{(x-z)^2 + 4y^2}}{2}\right) dx dy dz =$$

$$= 2 \iint \delta(t_1 + t_2 - x - z) \delta(t_2 - t_1 - \sqrt{(x-z)^2 + 4y^2}) dx dy dz =$$

$$= 2 \iint_{(x-z)^2 \leq (t_2-t_1)^2} \delta(t_1 + t_2 - x - z) \frac{|t_2 - t_1|}{\sqrt{(t_2 - t_1)^2 - (x-z)^2}} dx dz \quad (1.22)$$

e usando le variabili $s = x + z$, $v = x - z$, $ds dv = 2 dx dz$, si ha

$$I = |t_2 - t_1| \int ds \delta(t_1 + t_2 - s) \int_{v^2 \leq (t_2 - t_1)^2} dv \frac{1}{\sqrt{(t_2 - t_1)^2 - v^2}} = \pi |t_2 - t_1| \quad (1.23)$$

Esercizio 1.3. Nello spazio \mathcal{H}_n la distanza fra due matrici Hermitiane X, Y e' $\sqrt{\text{tr}(X - Y)^2}$. Mostriamo ora : a) l'invarianza della misura $\mathcal{D}H = \mathcal{D}H'$, se $H' = UHU^{-1}$; b) la valutazione degli integrali matriciali gaussiani.

1.3a).³ Consideriamo le n^2 variabili indipendenti reali di H come un vettore $\vec{H} = (h_{11}, \dots, h_{nn}, \text{Re } h_{12}, \dots, \text{Re } h_{n-1,n}, \text{Im } h_{12}, \dots, \text{Im } h_{n-1,n})$ ed analogamente il vettore \vec{H}' . Sia D la matrice diagonale $n^2 \times n^2$ con 1 sui primi n elementi della diagonale, 2 sui successivi $n^2 - n$ elementi. Si ha $\text{tr}(H^2) = \sum_{i=1}^n h_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\text{Re } h_{ij})^2 + (\text{Im } h_{ij})^2 = (\vec{H}, D\vec{H})$. Se $H' = UHU^{-1}$, certamente $\text{tr}(H^2) = \text{tr}(H'^2)$, quindi $(\vec{H}, D\vec{H}) = (\vec{H}', D\vec{H}')$. Sia A la matrice $n^2 \times n^2$ tale che $\vec{H}' = A\vec{H}$, l'equazione precedente implica $(A, DA) = D$ ovvero $A^{\text{tr}}DA = D$ che implica $|\det A| = 1$, ovvero $\mathcal{D}H = \mathcal{D}H'$.

$$1.3b \quad \int \mathcal{D}H e^{-\text{tr } H^2} = \int D\vec{H} e^{-(\vec{H}, D\vec{H})} = (\pi)^{n^2/2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n(n-1)/2} \quad (1.24)$$

Sia K una matrice Hermitiana, l'integrale (1.25) puo' essere valutato "completando il quadrato". Infatti $\text{tr } HK = (\vec{H}, D\vec{K})$ e

$$\begin{aligned} Z(K) &= \int \mathcal{D}H e^{-\text{tr } H^2 + \text{tr } HK} = e^{(\vec{K}, D\vec{K})/4} \int \mathcal{D}H e^{-((\vec{H} - \vec{K}/2), D(\vec{H} - \vec{K}/2))} = \\ &= (\pi)^{n^2/2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n(n-1)/2} e^{\frac{1}{4}\text{tr } K^2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Esercizio 1.4. Gli usuali polinomi di Hermite sono

$$\begin{aligned} H_n(x) &= n! \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2x)^{n-2k}}{k! (n-2k)!} = (2x)^n + \dots \text{ordini inferiori} \quad , \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx &= 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \quad , \\ H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) &= 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.26)$$

Per i polinomi monici $P_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^n} H_n(x)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{n!}{2^n} \sqrt{\pi} \delta_{nm} \stackrel{\text{def}}{=} h_n \delta_{nm}$$

³Questo semplice argomento si trova nel cap.5.2 della monografia di Percy Deift, *Orthogonal Polynomials and Random Matrices : A Riemann-Hilbert Approach*, Courant Lecture Notes in Mathematics (1999).

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) - xP_n(x) + \frac{n}{2}P_{n-1}(x) &= 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \\
P_0(x) &= 1 \quad , \quad P_1(x) = x
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Valutiamo ora la costante C_n in equaz. (1.17).

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\det[P_{j-1}(\lambda_i)] \right)^2 e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^2} \prod_{i=1}^n d\lambda_i \tag{1.28}$$

I termini dello sviluppo del determinante sono del tipo $P_{i_1-1}(\lambda_{i_1})P_{i_2-1}(\lambda_{i_2}) \cdots P_{i_n-1}(\lambda_{i_n})$ dove (i_1, i_2, \dots, i_n) e' una delle $n!$ permutazioni di $(1, 2, \dots, n)$, con segno appropriato. Poiche' il determinante e' al quadrato, si hanno $n!$ termini del tipo $P_{i_1-1}^2(\lambda_{i_1})P_{i_2-1}^2(\lambda_{i_2}) \cdots P_{i_n-1}^2(\lambda_{i_n})$ e i prodotti misti. Questi ultimi sono nulli a causa della ortogonalita' mentre dai termini quadrati si ha

$$C_n = n! h_0 h_1 h_2 \cdots h_{n-1} = (\pi)^{n/2} \frac{1! 2! 3! \cdots n!}{2^{n(n-1)/2}} \tag{1.29}$$

Per la valutazione di (1.18), usando la completa simmetria dell'integrando si ha

$$\begin{aligned}
\langle \text{tr} H^4 \rangle &= \frac{n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n d\lambda_i (\lambda_1^4) \Delta^2(\lambda) e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k^2}}{C_n} \quad , \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^4 P_r^2(x) dx &= \frac{6r^2 + 6r + 3}{4} h_r = \frac{3}{4} ((r+1)^2 + r^2) h_r \quad , \\
\langle \text{tr} H^4 \rangle &= n \left\{ \left(\frac{3h_0}{4} \right) \frac{(n-1)! h_1 h_2 \cdots h_{n-1}}{n! h_0 h_1 \cdots h_{n-1}} + \left(\frac{15h_1}{4} \right) \frac{(n-1)! h_0 h_2 \cdots h_{n-1}}{n! h_0 h_1 \cdots h_{n-1}} + \cdots + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{6(n-1)^2 + 6(n-1) + 3}{4} \right) h_{n-1} \frac{(n-1)! h_0 h_1 \cdots h_{n-2}}{n! h_0 h_1 \cdots h_{n-1}} \right\} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} (6k^2 + 6k + 3) = \\
&= \frac{n(2n^2 + 1)}{4} \tag{1.30}
\end{aligned}$$

Esercizio 1.5. Procedendo come nell'esercizio 1.4 si valuta

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^6 P_r^2(x) dx &= \frac{5(4r^3 + 6r^2 + 8r + 3)}{8} h_r \quad , \\
\langle \text{tr} H^6 \rangle &= \frac{5}{8} \sum_{k=0}^{n-1} (4k^3 + 6k^2 + 8k + 3) = \frac{5}{8} n^2 (n^2 + 2) \tag{1.31}
\end{aligned}$$

Questo risultato puo' essere interpretato come la somma di 15 grafi di Feynman, ottenuti richiudendo un vertice a 6 linee, con 3 propagatori (che originano il fattore 1/8). Dei 15 possibili modi, 5 sono grafi planari e 10 sono grafi non-planari, imbeddabili su un toro.

2 Group weight, diagrammatica, gli sviluppi topologici

Group weight e diagrammatica

L'azione della usuale teoria di Yang e Mills, per il gruppo $SU(N)$ con fermioni di Dirac nella rappresentazione fondamentale e'

$$S(A, \psi, \bar{\psi}) = \int d^4x \left[\frac{1}{4} \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) + \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu - ig A_\mu) \psi \right] ,$$

$$F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \quad (2.1)$$

Il campo $A_\mu(x)$ e' una matrice Hermitiana di ordine n e viene proiettata dai generatori T^a del gruppo $SU(n)$, definiti nelle equaz. (1.11), in campi componenti $A_\mu^a(x)$:

$$A_\mu^a(x) = \text{tr}(A_\mu(x) T^a) \quad , \quad A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{n^2-1} A_\mu^a(x) T^a \quad ,$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x)] = A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) [T^a, T^b] = i f^{abc} A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) T^c \quad (2.2)$$

Nello sviluppo perturbativo, gli accoppiamenti a 3 gluoni, 4 gluoni, spinore-gluone-spinore espressi in campi componenti, sono ⁴

$$-\frac{ig}{2} \text{tr} \left((\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) [A_\mu, A_\nu] \right) = -\frac{ig}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c \text{tr}(T^a T^b T^c - T^a T^c T^b) =$$

$$= \frac{g}{2} f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c \quad ,$$

$$-\frac{g^2}{4} \text{tr} \left([A_\mu, A_\nu]^2 \right) = \frac{g^2}{4} f^{abk} f^{cdk} A_\mu^a A_\nu^b A_\mu^c A_\nu^d \quad ,$$

$$-ig \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu \psi = -ig (T^a)_{rs} \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_s A_\mu^a \quad , \quad r, s = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Ad ogni grafo di Feynman G della teoria perturbativa e' associata una ampiezza che e' il prodotto di un fattore W_G , detto peso di gruppo che dipende dai vari f^{abc} , $(T^a)_{rs}$, moltiplicato il fattore M_G , che e' il fattore di spazio-tempo, integrale multiplo sui momenti interni del grafo.

Il peso di gruppo W_G e' esso stesso un grafo di Feynman in uno spazio finito, con le regole [2]:

- (a) per ogni linea interna di uno spinore nella rappresentazione fondamentale, un fattore δ_{rs} , $r, s = 1, \dots, n$,
- (b) per ogni linea di un gluone interno, un fattore δ_{ab} , $a, b = 1, \dots, n^2 - 1$,

⁴Per semplificare la notazione, non indico la somma sull'indice da 1 a 4 degli spinori di Dirac.

- (c) per ogni vertice spinore-spinore-gluone, un fattore $(T^a)_{rs}$,
- (d) per ogni vertice 3 gluoni, un fattore f^{abc} ,
- (e) per vertice 4 gluoni, i fattori $f^{abk} f^{cdk}$

La valutazione del peso di gruppo W_G e' molto facile e conviene operare in due passi :

- (1) esprimere il vertice a 3 gluoni in termini della rappresentazione fondamentale, $i f^{abc} = \text{tr}(T^a T^b T^c - T^c T^b T^a)$,
- (2) eliminare tutte le linee interne dei gluoni usando la relazione di completezza $(T^a)_{pq}(T^a)_{rs} = \delta_{ps}\delta_{qr} - \frac{1}{n}\delta_{pq}\delta_{rs}$.

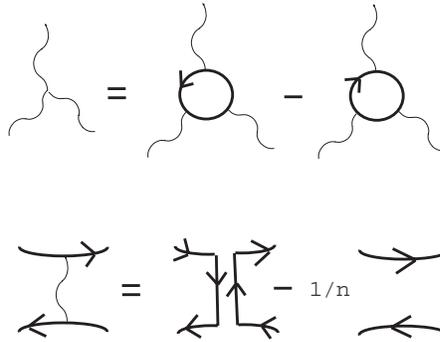


Fig.3

Mediante queste regole e' facile valutare i pesi di gruppo seguenti

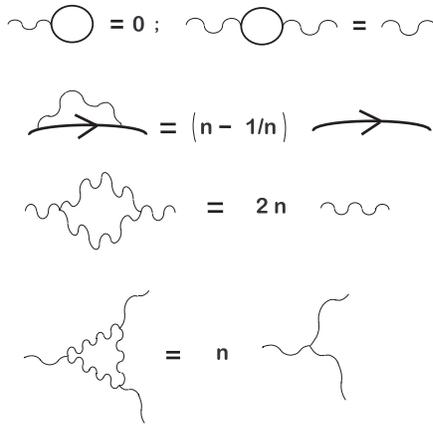


Fig.4

Alternativamente si puo' esprimere direttamente la lagrangiana e le regole di Feynman nella notazione a doppia linea di 't Hooft, essendo $A_{ij}^\mu = \sum_a A^{\mu,a} T_{ij}^a$.

Il propagatore del gluone e'

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T A_{ij}^\mu(x) A_{kl}^\nu(0) | 0 \rangle &= \sum_{a,b} \langle 0 | T A^{\mu,a}(x) A^{\nu,b}(0) | 0 \rangle (T^a)_{ij} (T^b)_{kl} \sim \\
 &\sim \sum_{a,b} \delta_{a,b} (T^a)_{ij} (T^b)_{kl} = \delta_{ii} \delta_{jk} - \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Gli sviluppi topologici

Grafi planari. Consideriamo inizialmente grafi di Feynman connessi, di vuoto, generati da una azione con vertici a 3 o a 4 linee, di un unico campo quantistico. L'usuale proiezione stereografica ci consente di ritenere equivalenti il piano compatificato e la sfera. Chiamiamo planari i grafi, come il primo in Fig.5, che possono essere disegnati nel piano compatificato in modo tale che le linee del grafo si incontrano solo nei vertici. Il secondo e terzo grafo in Fig.5 anche essi con 10 vertici trivalenti sono non-planari.

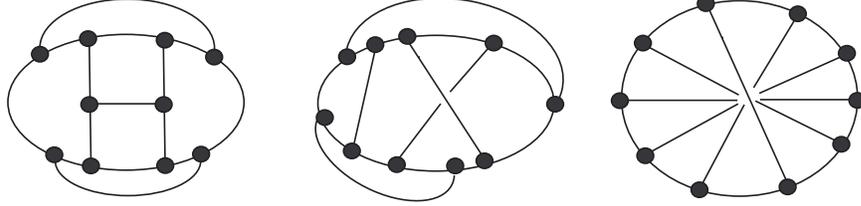


Fig.5

Le superfici orientabili bidimensionali senza bordi sono topologicamente sfere con h maniglie (handles), S_h , il piano compatificato ha $h = 0$, il toro ha $h = 1$, etc... Il secondo grafo in fig.5 puo' essere disegnato sul toro, che rappresento nel primo grafo della Fig.6 come un rettangolo con lati opposti identificati. Si puo' verificare che il grafo divide il toro in 5 regioni. Il terzo grafo della Fig.5 necessita la sfera S_2 , ovvero un ottagono con 4 coppie di lati opportunamente identificati (usualmente indicati percorrendo il perimetro dell'ottagono con le lettere $a, b, a^{-1}, b^{-1}, c, d, c^{-1}, d^{-1}$).

Si puo' verificare che il grafo divide la sfera S_2 in sole 3 regioni.

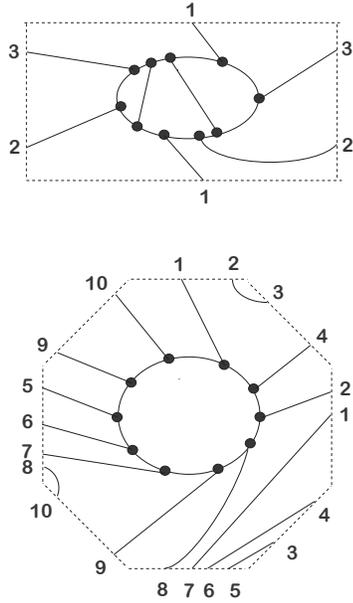


Fig 6

Ogni grafo e' caratterizzato dal numero di maniglie minimo della sfera sulla quale il grafo puo' essere disegnato in modo appropriato. Il generico grafo, appropriatamente disegnato sulla sfera S_h la divide in F regioni o facce e vale la relazione di Euler-Poincare'

$$V - E + F = 2 - 2h \quad (2.5)$$

dove V e' il numero dei vertici del grafo, E il numero totale delle linee (edges) del grafo, F il numero delle regioni (faces) in cui il grafo divide la sfera S_h .

Nell'esempio di Fig.5 e Fig.6 si verifica che i 3 grafi con $V = 10$, $E = 15$ hanno rispettivamente $F = 7$ (il grafo planare), $F = 5$ il grafo non-planare disegnato su S_1 , $F = 3$ il grafo non-planare disegnato su S_2 .

Lo sviluppo topologico di G. 't Hooft (1974).[3]

Il peso di gruppo di un grafo della teoria di Yang e Mills (2.1), disegnato sulla opportuna sfera S_h , ed usando le regole in Fig.3, diviene un grafo con una doppia linea in corrispondenza ad ogni gluone ed un linea singola in corrispondenza ad ogni linea di quarks nella rappresentazione fondamentale.

Le regioni in cui il grafo divide la superficie S_h hanno un naturale orientamento definito dalle frecce delle linee singole che formano il contorno della regione. Le regole in Fig.3, appropriate al gruppo $SU(n)$, originano lo stesso orientamento in tutte le regioni, giustificando percio' l'uso delle superfici S_h . Se il gruppo di

gauge della teoria e' $SO(n)$ oppure $Sp(2n)$ si hanno regole analoghe a quelle in Fig.3, che pero' non mantengono l'orientamento delle regioni. Oltre alle superfici orientabili S_h vanno allora considerate anche le superfici non-orientabili.[4]

Il lato a destra nella Fig.7 rappresenta solo una parte del peso di gruppo dei grafi a sinistra nella figura ; esso e' il contributo che domina nel limite $n \rightarrow \infty$.

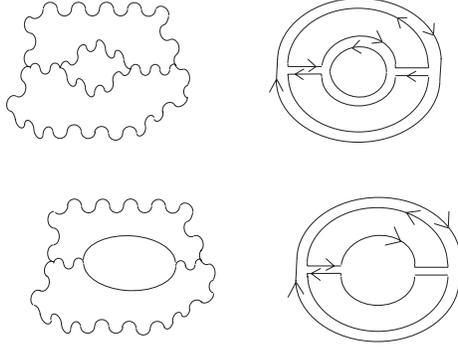


Fig.7

Il numero di regioni e' in corrispondenza biunivoca con le linee singole che ne formano il perimetro e quindi con il numero di linee chiuse indipendenti ciascuna associata ad un indice $\sum_{j=1}^n \delta_{jj} = n$. Percio' se considero i 3 grafi della Fig.5 come 3 grafi di Feynman di vuoto all'ordine $g^1 0$ della teoria di Yang e Mills (2.1) dove tutte le linee sono gluoni possiamo predire che il peso di gruppo del primo grafo, planare, e' un polinomio del tipo $n^7 + c_5 n^5 + c_3 n^3 + c_1 n$. Il polinomio nella variabile n associato al secondo grafo della Fig.5 ha grado massimo n^5 ed il polinomio nella variabile n associato al terzo grafo della Fig.5 ha grado massimo n^3 .

Ciascun vertice a 4 gluoni ha un contributo g^2 ed e' associato alla contrazione (di un solo indice) di due tensori f^{abc} , ovvero diagrammaticamente a due vertici a 3 gluoni, in 3 possibili modi. Si perviene alla conclusione che ogni grafo di vuoto connesso con linee tutte di gluoni ha un peso di gruppo il cui monomio di grado massimo e' ⁵

$$g^{V_3+2V_4} n^F = g^{2E-2V} n^F = (g^2)^{F-2+2h} n^F = (g^2 n)^{F-2+2h} n^{2-2h} \quad (2.6)$$

Usualmente viene chiamato limite di 't Hooft il limite $n \rightarrow \infty, g \rightarrow 0$ mantenendo $\tilde{g}^2 \stackrel{\text{def}}{=} g^2 n$ fissato. In tale limite i grafi planari della teoria di Yang e Mills con gruppo $SU(n)$ sono dominanti, la classe infinita dei grafi non-planari disegnabili sulla superficie S_h forma una correzione di ordine n^{-2h} rispetto ai grafi planari.

⁵Indicando con V_j il numero di vertici di valenza j di un grafo connesso, si ha $2E = \sum_j j V_j = 3V_3 + 4V_4, V = V_3 + V_4$, da cui $2E - 2V = V_3 + 2V_4$.

Le loops di quarks (campi nella rappresentazione fondamentale) portano una linea singola in luogo di una doppia, vedi le due figure in basso in Fig.7. Cio' comporta la perdita di un fattore n per ogni loop di quark, rispetto all'analogo grafo dove una loop di gluoni sostituisce la loop di quarks. Detto L il numero di loop di quark presenti in un grafo di vuoto connesso, il contributo per $n \rightarrow \infty$ e' $(g^2 n)^{F-2+2h} n^{2-2h-L}$. Nella valutazione del peso di gruppo dei grafi e' facile vedere, che queste loops, appropriatamente disegnate su S_h sono vuote (tutte le linee dei gluoni sono da disegnare all'esterno), vedi esercizio 2.1.

Se i fermioni, nella rappresentazione fondamentale del gruppo di gauge $SU(n)$, sono anche nella rappresentazione fondamentale di un gruppo $U(n_f)$ di flavor, che e' una simmetria globale o rigida della teoria, ad ogni loop di questi fermioni e' associato un fattore n_f . Nel limite di 't Hooft, un grafo di vuoto connesso, con L loops fermioniche, per $n \rightarrow \infty$ ha un contributo che e' depresso per un fattore $(n_f/n)^L$ rispetto all'analogo grafo dove loops di gluoni sostituiscono quelle fermioniche.

Poiche' nel limite di 't Hooft sopravvivono solo i grafi planari interamente gluonici, la teoria di Yang e Mills risulta semplificata. Cio' ha permesso la soluzione analitica di alcuni modelli in dimensione ridotta quali la QCD in $d = 2$ e modelli con la simmetria globale $SU(n)$ in dimensione zero ed uno, detti modelli ad una matrice.

Altri sviluppi topologici.

Se invece i fermioni sono scelti nella rappresentazione aggiunta di $SU(n)$ il vertice quark-gluone-quark ha la costante di accoppiamento f^{abc} , come nel vertice a 3 gluoni, e il propagatore dei quark e' una doppia linea, come il propagatore dei gluoni. In questo caso i grafi contenenti loops di quarks non sono depressi nel limite di 't Hooft rispetto agli analoghi grafi interamente gluonici.

Questo succede necessariamente nella teoria supersimmetrica, **Susy Yang-Mills** $SU(n)$. La teoria supersimmetrica di Yang e Mills, con una carica di supersimmetria, $\mathcal{N} = 1$, anche in assenza di campi di materia, richiede un supercampo vettoriale nella rappresentazione aggiunta, che espresso in campi componenti, contiene un campo gluonico v_μ di spin uno ed il suo partner supersimmetrico, chiamato gluino λ che e' un campo fermionico di spin 1/2, vedi Esercizio 2.2

Lo sviluppo topologico di G.Veneziano (1976)

Benche' non sia stato possibile in 30 anni "risolvere" analiticamente la teoria di gauge $SU(n)$ nel limite di 'tHooft, vale a dire sommare tutti i grafi planari puramente gluonici in dimensione fisica $1 + 3$, questo limite ha avuto grande importanza perche la teoria dei grafi planari presenta analogie con la teoria delle

stringhe e perché la fenomenologia delle interazioni forti suggerita dal predominio dei grafi planari descrive con successo le interazioni adroniche. Per altri aspetti fenomenologici invece, è dannoso trascurare il contributo delle loops fermioniche. G. Veneziano [5] ha dettagliatamente descritto lo sviluppo topologico che si ottiene nell'usuale teoria di gauge $SU(n)$ quando i fermioni (i quarks) pur essendo nella rappresentazione fondamentale di $SU(n)$ hanno n_f sapori e la teoria ha una ulteriore invarianza $U(n_f)$ globale. Il limite considerato dallo sviluppo topologico di Veneziano è $n \rightarrow \infty$, $n_f \rightarrow \infty$, $g \rightarrow 0$ mantenendo $\tilde{g}^2 \stackrel{\text{def}}{=} g^2 n$ fissato **ed anche n/n_f fissato**. In questo caso una loop fermionica, che sarebbe depressa del fattore $1/n$ nel limite di t'Hooft, acquista un fattore n_f , che è dell'ordine di n e non è più depressa (se è possibile disegnare l'intero grafo sulla sfera con le loop fermioniche tutte vuote ed orientate nello stesso verso).

Fermioni come tensori antisimmetrici di $SU(n)$.

Recentemente [6] è stato proposto di rappresentare i quarks di QCD nella rappresentazione di tensore antisimmetrico con due indici del gruppo di gauge $SU(n)$, e mantenere l'eventuale numero di sapori n_f fissato. Con questa proposta si ha che nel caso fisico $n = 3$ la rappresentazione tensoriale antisimmetrica di $SU(3)$ è equivalente alla rappresentazione fondamentale, mentre se si considera il limite di t'Hooft del modello, le loop di quarks non sono soppresse, né sono vuote. Questa situazione è cioè molto simile a Susy $SU(n)$ QCD, ma i fermioni di questa, $n^2 - 1$ gluini sono qui rimpiazzati da $n^2 - n$ quarks, massivi o massless.

Esercizi.

Esercizio 2.1 La presenza di due tipi di campi, uno nella rappresentazione aggiunta ed uno nella rappresentazione fondamentale, porta a generalizzare la nozione di grafi planari, precedentemente descritta. I grafi saranno ora definiti planari se e solo se possono essere disegnati nel piano compattificato in modo tale che tutte le loops di campi nella rappresentazione fondamentale sono vuote ed orientate nello stesso verso.

È facile valutare il peso di gruppo dei due grafi in Fig.10

$$= \mathbf{g}^4 \left(n^3 - 2n + 1/n \right)$$

$$= \mathbf{g}^4 \left(-n + 1/n \right)$$

Fig.10

Esercizio 2.2 Rammento la definizione di Susy Yang-Mills $SU(n)$.

La formulazione piu' compatta utilizza il superspazio, dove alle coordinate x^μ sono aggiunte due piu' coordinate grassmaniane $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Questi spinori sono indipendenti da x^μ . Un supercampo $F(x, \theta, \bar{\theta})$ puo' essere sempre sviluppato in serie formale di Taylor, ed poiche' il prodotto di piu' di due θ o quello di piu' di due $\bar{\theta}$ e' nullo, la serie si arresta

$$F(x, \theta, \bar{\theta}) = f(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rho(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) \quad (2.7)$$

Si definiscono derivate supercovarianti ⁶ $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \right] \quad (2.8)$$

Un supercampo Φ che soddisfa la condizione $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ e' detto un supercampo chirale. Si puo' definire $y^\mu = x^\mu + i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Un supercampo chirale dipende solo da y e θ , $\Phi = \Phi(y, \theta)$. ⁷ Il suo sviluppo e'

$$\begin{aligned} \Phi(y, \theta) &= \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) = \\ &= \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) + \sqrt{2}\theta i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\psi(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nelle teorie di gauge abeliane o non-abeliane, c'e' un supercampo vettoriale reale $V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger$. Esso non e' un supercampo chirale ; si puo' utilizzare un

⁶L'importanza di queste derivate nelle teorie supersimmetriche e' dovuta al fatto che $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ anticommutano con i generatori della supersimmetria. Questo implica che il trasformato di supersimmetria di un supercampo chirale, vedi equaz.(2.9) e' ancora un supercampo chirale

⁷Questo segue dall'osservazione che $\bar{D}_{\dot{\alpha}}y^\mu = 0$ ed anche $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0$, quindi la generale funzione di y e θ e' un supercampo chirale.

gauge, detto di Wess-Zumino, che elimina molte componenti del campo

$$V_{W.Z.} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \quad (2.10)$$

I campi componenti sono un campo vettore $v_\mu(x)$, uno spinore di Weyl $\lambda(x)$, ed un campo ausiliario $D(x)$.

Nella teoria di gauge $SU(n)$ il supercampo V e' nella rappresentazione aggiunta, $V = V_a T^a$ e cosi' pure i campi componenti (v_μ, λ, D) . L'oggetto fondamentale della teoria diviene e^V e la trasformazione di gauge non abeliana e'

$$e^V \rightarrow e^{i\Lambda^\dagger} e^V e^{-i\Lambda} \quad (2.11)$$

dove Λ e' un supercampo chirale.

La densita' lagrangiana di susy $SU(n)$ Yang-Mills puo' essere scritta in campi componenti

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}^a f^{\mu\nu a} + i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + \frac{1}{2}D^a D^a \quad , \\ f_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu v_\nu^a - \partial_\nu v_\mu^a - g f^{abc} v_\mu^b v_\nu^c \quad , \quad D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a - g f^{abc} v_\mu^b \lambda^c \end{aligned} \quad (2.12)$$

3 Soluzione del modello una matrice per $n \rightarrow \infty$.

La legge del semicerchio di Wigner .

Sia H la generica matrice Hermitiana di ordine n e definiamo $G_{ij}(z)$

$$\begin{aligned} G_{ij}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} E\left(\frac{1}{z-H}\right)_{ij} = \frac{\int \mathcal{D}H \left(\frac{1}{z-H}\right)_{ij} e^{-\frac{n}{2}\text{tr}H^2}}{\int \mathcal{D}H e^{-\frac{n}{2}\text{tr}H^2}} = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+1}} \int \mathcal{D}H (H^{2k})_{ij} e^{-\frac{n}{2}\text{tr}H^2}}{\int \mathcal{D}H e^{-\frac{n}{2}\text{tr}H^2}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

La presenza del fattore n nella misura gaussiana , che non era presente nell'esempio 2, vedi equaz.(1.10) e seguenti, e' predisposta ad ottenere un limite significativo per $n \rightarrow \infty$. Poiche' la misura di integrazione e' invariante per trasformazioni unitarie $H \rightarrow H' = UH U^{-1}$, il tensore $G_{ij}(z)$ e' proporzionale a δ_{ij}

$$G_{ij}(z) = \delta_{ij} G(z) \quad , \quad G(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} E\left(\text{tr}\frac{1}{z-H}\right) \quad (3.2)$$

La serie in equaz.(3.1)

$$G_{ij}(z) = \frac{\delta_{ij}}{z} + \frac{\delta_{ij}}{z^3} + \frac{1}{z^5} \frac{\int \mathcal{D}H (H^4)_{ij} e^{-\frac{n}{2}\text{tr}H^2}}{\int \mathcal{D}H e^{-\frac{n}{2}\text{tr}H^2}} + \dots \quad (3.3)$$

e' convenientemente descritta ⁸ da una serie di grafi di Feynman, analoga alla valutazione del propagatore completo del quark, che qui ha il propagatore bare $1/z$ interagente con gluoni gaussiani, qui rappresentati dalla matrice H , con le regole di Feynman delle parti a, b, c nella Fig.11

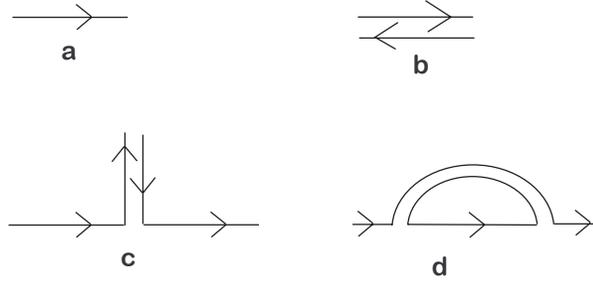


Fig.11

Al propagatore bare del quark, Fig.11a, e' associato il fattore $1/z$, al propagatore bare del campo matriciale, Fig.11b, e' associato il fattore

$$\frac{\int \mathcal{D}H H_{ij} H_{kl} e^{-\frac{z}{2} \text{tr} H^2}}{\int \mathcal{D}H e^{-\frac{z}{2} \text{tr} H^2}} = \frac{1}{n} \delta_{il} \delta_{jk} \quad (3.4)$$

Al vertice di interazione, Fig.11c, e' associato il fattore 1.

Il grafo in Fig.11d corrisponde al termine proporzionale a $1/z^3$ nella serie (3.3), dove il fattore $1/n$ del propagatore del gluone e' compensato dalla loop chiusa di indice singolo e il fattore $1/z^3$ risulta dai 3 propagatori bare del quark.

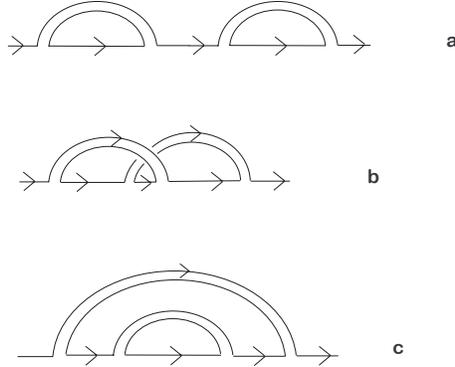


Fig.12

⁸Questa derivazione si trova nel cap.7 della monografia di A.Zee, *Quantum Field Theory*, (2003) Princeton Univ.Press.

I 3 grafi che contribuiscono all'ordine $1/z^5$ nella serie (3.3), sono rappresentati in Fig.12. Il primo ed il terzo di essi sono planari e contribuiscono $1/z^5$, il secondo e' non-planare e contribuisce $1/(n^2 z^5)$. Solo il grafo in Fig.12c e' irriducibile.

Possiamo trascurare i grafi una-particella-irriducibili, mediante l'usuale equazione di Dyson che esprime il propagatore completo in termini dei grafi di self-energia $\Sigma(z)$

$$G_{ij}(z) = \frac{\delta_{ij}}{z} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma(z)}{z}} = \delta_{ij} \frac{1}{z - \Sigma(z)} \quad (3.5)$$

Nel limite $n \rightarrow \infty$ i grafi planari sono dominanti ed e' possibile ottenere una semplice valutazione della serie dei grafi planari. Infatti un esame della serie perturbativa che contribuisce alla parte planare della self-energia, mostra che il generico grafo di self-energia planare e' costituito da un arco in doppia linea, con all'interno un generico grafo planare del propagatore, come ad esempio in Fig.13.

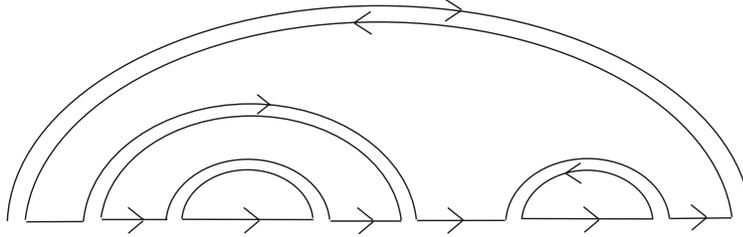


Fig.13

Questa osservazione si traduce nella equazione

$$\Sigma(z) = G(z) \quad (3.6)$$

che combinata con l'equazione di Dyson (3.5), origina una equazione algebrica per $G(z)$. La soluzione da scegliere e' facilmente individuata dalla richiesta di riprodurre la serie perturbativa planare

$$G(z) = \frac{1}{1 - G(z)} \quad , \quad G(z) = \frac{1}{2} \left(z - \sqrt{z^2 - 4} \right) \quad (3.7)$$

La parte immaginaria di $G(z)$ determina la densita' spettrale, vedi equaz.(1.8), dell'insieme di matrici Hermitiane gaussiane, nel limite $n \rightarrow \infty$ ed essendo $\text{Im}G(z) = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} = -\pi \rho(x)$, si ottiene la legge del semicerchio di Wigner

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2} & , \quad \text{se } -2 \leq \lambda \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1 \quad (3.8)$$

Il gas di Dyson.

La derivazione della legge del semicerchio di Wigner corrisponde alla somma dei grafi planari di una teoria di campo matriciale gaussiana, cioe' libera, nel limite $n \rightarrow \infty$ in dimensione zero di spazio-tempo, dove cioe' gli integrali di Feynman hanno una parte di spazio-tempo banale e si riducono al peso di gruppo ed al coefficiente statistico. E' stato mostrato che le valutazioni degli integrali matriciali, sia per n finito sia per $n = \infty$, forniscono informazioni a teorie di interesse fisico. Il piu' semplice modello successivo e' l'integrale di matrici Hermitiane non-gaussiane (detto *modello una matrice*)

$$Z = \frac{\int \mathcal{D}H e^{-\text{tr} V(H)}}{\int \mathcal{D}H e^{-\frac{1}{2} \text{tr} H^2}} \quad (3.9)$$

dove $V(x)$ e' un polinomio della forma $V(x, c_j, n) = c_2 x^2 + \frac{c_3}{\sqrt{n}} x^3 + \frac{c_4}{n} x^4 + \dots + \frac{c_{2m}}{n^{m-1}} x^{2m}$, dove il coefficiente del monomio di grado massimo e' positivo. L'esplicita dipendenza da n dei coefficienti del polinomio e' quella che conduce ad un limite significativo per $n \rightarrow \infty$. Questa dipendenza puo' essere eliminata riscaldando tutte gli elementi della matrice $h_{ij} \rightarrow \sqrt{n} h_{ij}$, per cui $V(x, c_j, n) \rightarrow n V(x, c_j)$.

Il caso piu' semplice e' $V(x, g, n) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{g}{n} x^4 \rightarrow n (\frac{1}{2} x^2 + g x^4)$.

Poiche' gli integrandi e la misura sono invarianti rispetto alla trasformazione unitaria U che diagonalizza $H = U \Lambda U^{-1}$, le variabili angolari sono eliminate, vedi equaz.(1.16)-(1.19)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n d\lambda_k \Delta^2(\lambda) e^{-n \sum_k V(\lambda_k)}}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n d\lambda_k \Delta^2(\lambda) e^{-\frac{n}{2} \sum_k \lambda_k^2}} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n d\lambda_k e^{-n \sum_k V(\lambda_k) + \sum_{i < j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n d\lambda_k e^{-\frac{n}{2} \sum_k \lambda_k^2 + \sum_{i < j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Consideriamo un insieme di n punti materiali di carica elettrica unitaria in uno spazio bidimensionale, ma confinati su una retta, la posizione del k -esimo punto sia l'ascissa λ_k . Il numeratore dell'equaz.(3.10) e' la funzione di partizione di un gas classico di questi n punti, interagenti a coppie mediante repulsione elettrostatica⁹. Le molecole hanno ugual carica elettrica e ciascuna e' trattenuta da un potenziale $V(\lambda_k)$ attrattivo verso l'origine. Il denominatore, che normalizza

⁹In $d = 2$ la legge di Gauss determina che il campo elettrostatico di una carica puntiforme decresce come $1/r$ al crescere della distanza r dalla carica ; ne segue che il potenziale coulombiano in $d = 2$ dipende dal logaritmo della distanza

la funzione di partizione, e' analogo, ma con potenziale attrattivo quadratico.

$$Z = \text{costante} \times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n d\lambda_k e^{-n E(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} ,$$

$$E(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n V(\lambda_k) - \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (3.11)$$

$E(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e' l'energia della configurazione in cui le molecole del gas occupano le posizioni $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Essa e' minima se $\frac{\partial}{\partial \lambda_k} E(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ con tutte le derivate seconde maggiori di zero.

$$V'(\lambda_k) = \frac{2}{n} \sum_{i \neq k} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} , \quad k = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

Il limite $n \rightarrow \infty$ e l'equazione punto di sella.

Il limite $n \rightarrow \infty$ e' analogo al limite termodinamico per il gas di molecole di Dyson. La soluzione analitica del modello matriciale (3.10) mediante il punto di sella, descritta per la prima volta da Brézin et al [7] si generalizza immediatamente a qualunque potenziale polinomiale. Per semplicita' conviene considerare il semplice potenziale $V(x, g) = \frac{1}{2}x^2 + gx^4$. In questo caso

$$\begin{aligned} Z(g) &= \text{costante} \times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n d\lambda_k e^{-n \sum_k (\frac{1}{2}\lambda_k^2 + g\lambda_k^4) + \sum_{i < j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2} = \\ &= \text{costante} \times \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n d\lambda_k e^{-n^2 (\frac{1}{n} \sum_k (\frac{1}{2}\lambda_k^2 + g\lambda_k^4) - \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j|)} \\ &= \text{costante} \times e^{-n^2 F(g)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$F(g)$ e' l'energia libera nella analogia di meccanica statistica ed e' la somma dei grafi di vuoto di Feynman connessi quando $Z(g)$ e' interpretato come il funzionale generatore di una teoria di campo matriciale in $d = 0$. Questo integrale viene valutato col metodo del punto di sella, nel limite $n \rightarrow \infty$. Gli autovalori λ_i , che si puo' supporre ordinati $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ sono sostituiti da una funzione continua non-decrescente $\lambda_i = \lambda(i/n)$. Analogamente si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_k (\frac{1}{2}\lambda_k^2 + g\lambda_k^4) &\rightarrow \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2}\lambda^2(x) + g\lambda^4(x) \right) , \\ \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| &\rightarrow \int_0^1 \int_0^1 dx dy \log |\lambda(x) - \lambda(y)| \end{aligned} \quad (3.14)$$

$E(g)$ risulta quindi un funzionale che dipende dalla funzione $\lambda(x)$. La configurazione $\bar{\lambda}(x)$ che rende minima $E(g)$ per $n \rightarrow \infty$ e' la soluzione dell'equazione

integrale singolare che e' il limite continuo del sistema (3.12), ovvero

$$\frac{1}{2}\lambda(x) + 2g\lambda^3(x) = \int_0^1 \frac{dy}{\lambda(x) - \lambda(y)} \quad (3.15)$$

E' utile introdurre la densita' degli autovalori $\rho(\lambda) \geq 0$

$$\rho(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx}{d\lambda} \quad , \quad \int d\lambda \rho(\lambda) = 1 \quad (3.16)$$

e riesprimere l'equazione di punto di sella (3.15) nella forma

$$\frac{1}{2}\lambda + 2g\lambda^3 = \int \frac{\rho(\mu) d\mu}{\lambda - \mu} \quad , \quad \text{se } \lambda \in \text{supp } \rho \quad (3.17)$$

Le equazioni integrali singolari di questo tipo sono state molto studiate nelle teorie di mezzi continui elastici e di aerodinamica [8]. In generale ogni equazione del tipo (3.17) ammette molte soluzioni per la funzione incognita $\rho(\lambda)$, che differiscono per la scelta del supporto della $\rho(\lambda)$ e per l'andamento della funzione incognita agli estremi del supporto.

La scelta che corrisponde alla somma perturbativa dei grafi planari e' che $\rho(\lambda)$ sia una funzione pari di λ il cui supporto sia un segmento di asse reale, , simmetrico rispetto all'origine, diciamo $\lambda \in (-2a, 2a)$ e che $\rho(\lambda)$ sia nulla agli estremi del supporto. Fissate queste condizioni, si ottiene, vedi Esercizio 3.1

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + 4ga + 2g\lambda^2 \right) \sqrt{4a^2 - \lambda^2} \quad , \quad \lambda \in (-2a, 2a) \quad ,$$

essendo $12ga^4 + a^2 - 1 = 0$ (3.18)

La conoscenza della densita' spettrale (3.18) permette la valutazione analitica delle funzioni di Green e della somma connessa dei grafi di vuoto planari. Ad esempio, la generica "funzione di Green" $G_{2p}(g)$ e'

$$G_{2p}(g) = \frac{1}{n} \langle \text{tr } H^{2p} \rangle = \int_{-2a}^{2a} d\lambda \rho(\lambda) \lambda^{2p} \quad ,$$

$$G_2(g) = \frac{a^2(4 - a^2)}{3} \quad , \quad G_4(g) = a^4(3 - a^2) \quad , \quad G_6(g) = a^6(8 - 3a^2) \quad , \dots \quad (3.19)$$

Naturalmente per $g \rightarrow 0$, quindi $a^2 \rightarrow 1$, la densita' spettrale (3.18) riproduce la legge del semicerchio di Wigner (3.8) e le valutazioni delle funzioni di Green (3.19) riproducono il limite $n \rightarrow \infty$ del modello gaussiano, vedi equaz.(1.30), (1.31) purché queste ultime siano riscalate $H \rightarrow H\sqrt{n}/\sqrt{2}$ in accordo con la presente normalizzazione.

Le funzioni di Green $G_k(g)$ con k intero dispari sono nulle se la simmetria discreta $H \rightarrow -H$ non e' spontaneamente rotta.¹⁰

Esercizi.

Esercizio 3.1. La soluzione (3.18) puo' essere ricavata con il seguente metodo sistematico¹¹. L'inversa dell'equazione integrale singolare

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dy \frac{u(y)}{y-x} & e' \\ u(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(C - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dt \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-y} h(t) \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

dove C e' una costante arbitraria. Questa asserzione si giustifica facilmente sostituendo la soluzione $u(y)$ nella equazione integrale e sapendo che

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dy}{y-x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} &= 0 \quad , \\ \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 dt \frac{\phi(y,t)}{(y-x)(t-y)} - \int_{-1}^1 dt \int_{-1}^1 dy \frac{\phi(y,t)}{(y-x)(t-y)} \right) &= -\phi(x,x) \quad , \\ \text{dove } \phi(y,t) &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-y^2}} h(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

La seconda riga dell'equazione (3.21) e' nota come la formula di inversione di Poincaré-Bertrand, vedi per es. [8]. Riscalando le variabili $\lambda = x/2a$, $\mu = y/2a$ l'equazione di punto di sella (3.17) diviene

$$ax + 16ga^3x^3 = \int_{-1}^1 \frac{\rho(2ay) dy}{x-y} \quad , \quad \text{se } x \in [-1, 1] \quad (3.22)$$

A questa si applica la formula di inversione (3.20) con $h(t) = -(at + 16ga^3t^3)/\pi$, $u(y) = \rho(2ay)$

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(C + \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 dt \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-y} (at + 16ga^3t^3) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(C + \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{2} - y^2 \right) + \frac{16ga^3}{\pi} \left(\frac{1}{8} + \frac{y^2}{2} - y^4 \right) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

¹⁰Si ha rottura spontanea di questa simmetria discreta, nel modello quartico con "azione" $\text{tr} \left(\frac{1}{2} c_2 H^2 + g H^4 \right)$ se $c_2 \leq -4\sqrt{g}$, vedi G.M.Cicuta, L.Molinari, E.Montaldi, *Large N phase transitions in low dimensions*, Mod.Phys.Lett. **A 1** (1986) 125-129 e *Large-N spontaneous magnetization in zero dimensions*, J.of Phys. **A 20** (1987) L67-70. In tal caso la corretta densita' spettrale, che minimizza l'energia libera, e' una diversa soluzione dell'equazione di punto di sella, e non e' piu' una funzione pari di λ . In queste note avevamo fissato $c_2 > 0$ e la rottura spontanea di simmetria non puo' avvenire.

¹¹che mi e' stato insegnato dal defunto collega E.Montaldi.

La richiesta che la densita' sia nulla agli estremi del supporto e'

$$u(\pm 1) = 0 = C - \frac{1}{2\pi}a - \frac{6ga^3}{\pi} \quad (3.24)$$

e sostituendo nella (3.23) si ottiene

$$\begin{aligned} u(y) &= \sqrt{1-y^2} \frac{a}{\pi} (1 + 8ga^2 + 16ga^2y^2) \quad , \quad y \in [-1, 1] \quad \text{ovvero} \\ \rho(\lambda) &= \sqrt{4a^2 - \lambda^2} \frac{1}{2\pi} (1 + 8ga^2 + 4g\lambda^2) \quad , \quad \lambda \in [-2a, 2a] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Infine la condizione di normalizzazione $\int_{-1}^1 u(y) dy = \int_{-2a}^{2a} \rho(\lambda) \frac{d\lambda}{2a} = 1/(2a)$ e'

$$\frac{1}{2a} = \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} (1 + 8ga^2 + 16ga^2y^2) dy = a \left(\frac{1}{2} + 6ga^2 \right) \quad (3.26)$$

riproduce la soluzione (3.18).

4 Un po' di calculus.

Derivate rispetto al campo esterno. Nella teoria dei campi e' spesso conveniente valutare aspettative mediante derivate funzionali rispetto ad una sorgente esterna successivamente messa a zero. Ad esempio, per un campo scalare reale $\phi(x)$ e per ogni funzione $F(t)$ formalmente sviluppabile in serie di Taylor in $t = 0$ e' ben noto

$$\begin{aligned} \langle F(\phi(x)) \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}\phi F(\phi(x)) e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}} = \\ &= \frac{1}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}} F \left(\frac{\delta}{i\delta j(x)} \right) \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi] + i \int d^4z \phi(z) j(z)} \Bigg|_{j=0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Poiche' questo procedimento si applica anche ai termini di interazione presenti nell'azione $S[\phi]$, si ottiene formalmente qualunque aspettazione con opportune derivate funzionali applicate al funzionale gaussiano con sorgente esterna linearmente accoppiata al campo.

Analogo procedimento puo' essere usato per (campi) matrici. Avevamo valutato in equaz.(1.25) l'integrale di matrici hermitiane gaussiane linearmente accoppiate ad una matrice hermitiana K

$$Z(K) = \int \mathcal{D}H \quad e^{-\text{tr} H^2 + \text{tr} HK} = (\pi)^{n/2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n(n-1)/2} e^{\frac{1}{4} \text{tr} K^2} \quad (4.2)$$

Nelle derivazioni conviene considerare indipendenti la coppia di variabili complesse K_{ab}, K_{ab}^* , e ottenere

$$\begin{aligned} \text{tr} HK &= \sum_{ab} H_{ab} K_{ba} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial K_{cd}} \text{tr} HK = H_{dc} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial K_{cd}} \frac{1}{4} \text{tr} K^2 = \frac{1}{2} K_{dc} \quad , \\ \langle H_{ab} H_{cd} \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}H \quad H_{ab} H_{cd} e^{-\text{tr} H^2}}{\int \mathcal{D}H \quad e^{-\text{tr} H^2}} = \frac{\partial}{\partial K_{ba}} \frac{\partial}{\partial K_{dc}} e^{\frac{1}{4} \text{tr} K^2} \Big|_{K=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial K_{ba}} \frac{1}{2} K_{cd} e^{\frac{1}{4} \text{tr} K^2} \Big|_{K=0} = \frac{1}{2} \delta_{ad} \delta_{bc} \end{aligned} \quad (4.3)$$

in accordo con l'equazione (1.15). Analogamente si possono valutare mediante derivate gli integrali nelle equazioni (1.30) e (1.31). Ad esempio

$$\begin{aligned} \langle H_{ab} H_{cd} H_{rs} H_{tu} \rangle &= \frac{\partial}{\partial K_{ba}} \frac{\partial}{\partial K_{dc}} \frac{\partial}{\partial K_{sr}} \frac{\partial}{\partial K_{ut}} e^{-\text{tr} H^2} \Big|_{K=0} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\delta_{as} \delta_{br} \delta_{cu} \delta_{dt} + \delta_{au} \delta_{bt} \delta_{cs} \delta_{dr} + \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{ru} \delta_{st} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Integrali di Ingham e Siegel. Nella recente valutazione di integrali di Yang e Mills e del superpotenziale in teorie supersimmetriche, appaiono integrali matriciali del tipo di Ingham e Siegel.

E' conveniente cominciare dalla valutazione dell'integrale $I_{n,d}(b_{i,k})$ su n vettori reali \vec{v}_i , ciascuno avente d componenti

$$I_{n,d}(b_{i,k}) \stackrel{\text{def}}{=} \int \prod_{i=1}^n d\vec{v}_i \quad \prod_{1 \leq j < k \leq n} \delta(b_{j,k} - \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k) \quad (4.5)$$

La matrice $B = b_{j,k}$ e' reale simmetrica $n \times n$, definita positiva (i suoi autovalori sono positivi). Se $n \leq d$, i vettori sono genericamente linearmente indipendenti, e l'integrale viene valutato [9] [10]

$$I_{n,d}(b_{i,k}) = [\det_n(b_{i,k})]^{(d-n-1)/2} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\Omega_{d-j}}{2} \right) \quad , \quad \text{dove} \quad \Omega_{d-1} = 2 \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (4.6)$$

Questo risultato puo' essere moltiplicato per il fattore $e^{-\text{tr} BQ}$ dove Q e' una nuova matrice reale simmetrica $n \times n$ positiva, infine si integra sullo spazio delle matrici B . Si ottiene cosi' dalla integrazione gaussiana

$$\int_{B>0} dB e^{-\text{tr} BQ} \int \prod_{i=1}^n d\vec{v}_i \quad \prod_{1 \leq j < k \leq n} \delta(b_{j,k} - \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \prod_{i=1}^n d\vec{v}_i e^{-\vec{v}_j Q_{jk} \vec{v}_k} = \left(\frac{\pi^{n/2}}{\det Q} \right)^d = \\
&= \left(\prod_{j=1}^n \frac{\Omega_{d-j}}{2} \right) \int_{B>0} dB e^{-\text{tr} BQ} (\det B)^{(d-n-1)/2} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Quest'ultimo e' essenzialmente il risultato di Ingham (1933) recentemente ristudiato ed esteso da Fyodorov [11].

References

- [1] La fondamentale referenza sulle matrici aleatorie e' il testo M.L.Mehta, *Random Matrices*, second edition, Academic Press (1991).
Lezioni e rassegne pertinenti includono :
D.Bessis, C.Itzykson, J.B.Zuber, *Quantum field theory techniques in graphical enumeration*, Adv.Applied Math **1** (1980) 109-157.
C.A.Tracy, H.Widom , *Introduction to Random Matrices* pag.103-130 del volume *Geometric and Quantum Aspects of Integrable Systems* edito da G.E.Helminckk, Springer Lecture Notes in physics 424, Springer-Verlag (1993).
P. Ginsparg e G.Moore, *Lectures on 2D Gravity and 2D String Theory*, TASI Lectures (1992) 277-469 oppure hep-th/9304011.
P.Di Francesco, P.Ginsparg, J.Zinn-Justin, *2D Gravity and Random Matrices*, Phys.Rep. **254** (1995), 1-133 ;
T.Guhr, A.Muller-Groeling, H.A.Weidenmuller, *Random matrix theories in quantum physics: common concepts*, Phys.Rep. **299** (1998) 189, cond-mat/970701 ;
la monografia di J.Ambjorn, B.Durhuus, T.Jonsson, *Quantum Geometry*, Cambridge Univ.Press (1997).
M.Mulase, *Lectures on the asymptotic expansion of a Hermitian matrix integral* (1998), math-ph/9811023.
il vol.40 del MSRI edito da P.M.Bleher e A.R.Its, *Random Matrices and Their Applications*, Cambridge Univ. Press (2001) ;
M.Caselle, U.Magnea, *Random matrix theory and symmetric spaces* (2003) con-mat/0304363.
Le note di un corso *Random Matrices* , 117 pag., tenuto da B.Eynard a Saclay nell'autunno 2000 sono ottenibili all'indirizzo <http://www-sphat.cea.fr/articles/t01/014>.
Un volume di reprints commentati e' *The large N expansion in quantum field theory and statistical physics* di E.Brézin e S.R.Wadia (1993) World Scientific.

- [2] Il metodo diagrammatico di Cvitanovic per la valutazione dei pesi di gruppo e' descritto in P. Cvitanovic, *Group Theory for Feynman diagrams in non-Abelian gauge theories*, Phys. Rev. **D 14** (1976) 1536-1553 , nelle Nordita notes *Group Theory* (1994) e nel suo libro *Group Theory* in corso di pubblicazione da Princeton Univ.Press (2004).
- [3] Lo sviluppo topologico di G. 't Hooft e' descritto nei suoi articoli in Nucl.Phys. **B72** (1974) 461 , Nucl.Phys. **B75** (1974) 461 e in un suo recente preprint, G. 't Hooft , *Large N*, (2002) , hep-th/0204069.
- [4] Lo sviluppo topologico per teorie di gauge $SO(n)$ e $Sp(2n)$ e' descritto da G.P.Canning, Phys.Rev. **D12** (1975) 2506 e G.M.Cicuta, Lett. Nuovo Cimento **35** (1982) 87-92.
- [5] Lo sviluppo topologico di G.Veneziano e' descritto principalmente in *Some aspects of a unified approach to gauge, dual and gribov theories*, Nucl.Phys. **B117** (1976) 519.
- [6] A.Armoni, M.Shifman, G.Veneziano, hep-th/0302163, hep-th/0307097.
- [7] E.Brézin, C.Itzykson, G.Parisi, J.B.Zuber, *Planar Diagrams* , Comm. Math. Phys. **59** (1978) 35-51.
- [8] N.I.Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, ed. P.Nordhoff (1953) ora esiste l'edizione Dover ; oppure cap.4 di F.G.Tricomi, *Integral Equations*, Dover (1985).
- [9] G.M.Cicuta, L.Molinari, G.Vernizzi, *Yang-Mills Integrals*, J.of Phys.**A 35** (2002) L51-59 ovvero hep-th/0109160.
- [10] R.A.Janik, M.A.Nowak, *Wishart and Anti-Wishart random matrices*, J.of Phys.**A 36** (2003) 3629-3637 ovvero hep-th/0112017.
- [11] Y.V.Fyodorov, *Negative moments of characteristic polynomials of random matrices : Ingham-Siegel integral as an alternative to Hubbard-Stratonovic transformation*, Nucl.Phys. **B 621** (2002) 643 ovvero math-ph/0106006.