

# Rivelazione di Onde Gravitazionali con Interferometri a Larga Banda

Giuseppe Curci  
INFN  
Pisa

VI Seminario Nazionale di Fisica Teorica  
Parma 1-12 settembre 1997

# Processi Stocastici

Consideriamo un processo stocastico stazionario reale  $x(t)$  a media nulla e correlazione finita

$$E \{x(t)\} = 0$$

$$E \{x(t) x(t - \tau)\} = R(\tau)$$

La funzione  $R(\tau)$  è pari in  $\tau$  in quanto

$$\begin{aligned} R(\tau) &= E \{x(0) x(-\tau)\} = E \{x(\tau) x(0)\} \\ &= R(-\tau) \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che, essendo  $(x(t) - x(t - \tau))^2$  una quantità non negativa, abbiamo

$$E \left\{ (x(t) - x(t - \tau))^2 \right\} = 2R(0) - 2R(\tau) \geq 0$$

ovvero

$$R(\tau) \leq R(0)$$

# Densità Spettrale di Potenza

La densità spettrale di potenza (DSP) del processo  $x(t)$  è definita da

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\ &= 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \end{aligned}$$

La definizione di DSP, per process reali, implica che

$$S(f) = S(-f)$$

Osserviamo che la correlazione  $R(\tau)$  e la densità spettrale di potenza  $S(f)$  sono una coppia di trasformate di Fourier con

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f\tau} df \\ &= 2 \int_0^{\infty} S(f) \cos(2\pi f\tau) df \end{aligned}$$

La quantità  $R(0)$  è l'intensità, o potenza media, del processo  $x(t)$ . Osserviamo che la potenza media è collegata alla densità spettrale di potenza dalla relazione

$$R(0) = E \{ x^2(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$$

e pertanto

$$\int_0^{\infty} S(f) df = \frac{1}{2} E \{ x^2(t) \} \geq 0$$

Poiché  $E \{ x^2(t) \} = 2 \int_0^{\infty} S(f) df$  è naturale chiamare  $S(f)$  densità spettrale di potenza o spettro di potenza o più semplicemente spettro ed identificare il contributo  $2S(f) df$  con la potenza compresa tra le frequenze  $f$  e  $f + df$ , ovvero con la potenza del processo  $x(t)$  associata alle oscillazioni sinusoidali in  $(f, f + df)$ .

Una caratterizzazione più precisa della densità  $S(f)$  è contenuta nel teorema di Khinchin.

# Teorema di Khinchin

La densità spettrale di potenza del processo stocastico  $x(t)$  è non negativa:

$$S(f) \geq 0$$

Inoltre, definito il filtro passabanda  $H(f)$  con risposta in frequenza non nulla per frequenze  $f_b \leq |f| \leq f_b + \Delta f_b$

$$H(f) \neq 0 \quad f_b \leq |f| \leq f_b + \Delta f_b$$

nel limite  $\Delta f_b \rightarrow 0$  il prodotto  $S(f_b) \Delta f_b$  è proporzionale all'intensità delle oscillazioni all'uscita del filtro  $H(f)$  avente come ingresso il processo  $x(t)$ .

## Dimostrazione

Per dimostrare il teorema di Khinchin consideriamo il processo  $y(t)$  che si ottiene filtrando il processo  $x(t)$  con il filtro passabanda  $H(f)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t') x(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t') h(t') dt' \end{aligned}$$

La potenza media del processo  $y(t)$  è data da

$$\begin{aligned}
 E \{ y^2(t) \} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' h(t') h(t'') \\
 &\quad \times E \{ x(t-t') x(t-t'') \} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' h(t'') R(t''-t') h(t') \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S(f) df
 \end{aligned}$$

Nel limite di banda nulla,  $\Delta f_b \rightarrow 0$ , otteniamo

$$\begin{aligned}
 E \{ y^2(t) \} &= S(f_b) \Delta f_b + S(-f_b) \Delta f_b \\
 &= 2S(f_b) \Delta f_b \geq 0
 \end{aligned}$$

ed il teorema di Khinchin è così dimostrato.

Considerando solo frequenze positive, la funzione  $2S(f)$  è quindi la potenza media corrispondente ad un intervallo di 1 Hz che si ottiene tramite un banco di filtri passabanda di tipo  $H(f)$  opportunamente traslati in modo da ricoprire l'intervallo di frequenze desiderato.

Un corollario del teorema di Khinchin è che non tutte le funzioni  $R(\tau)$ , pari in  $\tau$ , possono essere correlazioni di processi stocastici in quanto non tutte le funzioni pari  $R(\tau)$  hanno trasformata di Fourier non negativa.

Consideriamo ora il tempo di correlazione  $\Delta\tau$  e la banda di frequenza  $\Delta f$  di un processo stocastico definiti da

$$\Delta\tau = \frac{\int_0^\infty R(\tau) d\tau}{R(0)}$$

$$\Delta f = \frac{\int_0^\infty S(f) df}{S(0)}$$

Tra le quantità,  $\Delta\tau$  e  $\Delta f$ , vale l'importante relazione

$$\Delta f \Delta\tau = \frac{1}{4}$$

Dimostrazione

Poiché

$$S(0) = 2 \int_0^\infty R(\tau) d\tau$$

e

$$R(0) = 2 \int_0^\infty S(f) df$$

segue che

$$\Delta f \Delta\tau = \frac{\int_0^\infty S(f) df}{S(0)} \frac{\int_0^\infty R(\tau) d\tau}{R(0)} = \frac{1}{4}$$

## Esempio Relazione Banda-Tempo Correlazione

Consideriamo il processo stocastico con correlazione

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\gamma} e^{-\gamma|\tau|}$$

e spettro

$$S(f) = \frac{\sigma^2}{(2\pi f)^2 + \gamma^2}$$

Allora

$$\Delta\tau = \int_0^\infty e^{-\gamma\tau} d\tau = \frac{1}{\gamma}$$

e

$$\Delta f = \int_0^\infty \frac{\gamma^2}{(2\pi f)^2 + \gamma^2} df = \frac{\gamma}{4}$$

in accordo con la relazione  $\Delta f \Delta t = 1/4$ .

La relazione  $\Delta f \Delta \tau = 1/4$  non è limitata a correlazione e spettro. E' valida per ogni coppia di trasformate di Fourier. Consideriamo ad esempio la coppia di trasformate di un filtro

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{i2\pi ft} df$$

In questo caso

$$\Delta t = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt}{2h(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt}{2 \int_{-\infty}^{\infty} H(f) df}$$

e

$$\Delta f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} H(f) df}{2H(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} H(f) df}{2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt}$$

e quindi

$$\Delta f \Delta t = \frac{1}{4}$$

Nel caso dei filtri,  $\Delta f$  definisce la banda passante del filtro e  $\Delta \tau$  la memoria del filtro, cioè l'intervallo temporale durante il quale l'ingresso influisce sensibilmente sull'uscita del filtro.

# Stima dello Spettro

I processi stocastici sperimentali sono di lunghezza temporale finita e quindi un problema frequente è la stima dello spettro di un processo stocastico tramite osservazioni limitate ad un intervallo temporale finito. Una stima spettrale molto usata nella pratica sperimentale è basata sulla misura della quantità

$$P_T(f) = \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

detta periodogramma, dove

$$X_T(f) = \int_0^T x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

La variabile random  $P_T(f)$  è uno stimatore di  $S(f)$ , e per  $T \rightarrow \infty$  il valore medio di  $P_T(f)$  tende alla densità spettrale  $S(f)$ .

Per dimostrare questa importante proprietà del periodogramma calcoliamo il valore di aspettazione di  $P_T(f)$

$$S_T(f) = \mathbf{E} \{P_T(f)\} = \frac{1}{T} \mathbf{E} \left\{ |X_T(f)|^2 \right\}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} S_T(f) &= \frac{1}{T} E \left\{ |X_T(f)|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T R(t-s) e^{-i2\pi f(t-s)} dt ds \\ &= \int_{-T}^T \left( 1 - \frac{|t|}{T} \right) R(t) e^{-i2\pi ft} dt \end{aligned}$$

e quindi  $S_T(f)$  è la trasformata di Fourier della correlazione  $R(t)$  pesata con la funzione

$$w(t) = \left( 1 - \frac{|t|}{T} \right) \theta(T-t) \theta(t+T)$$

detta finestra triangolare. Usando il teorema di modulazione della trasformata di Fourier, possiamo scrivere  $S_T(f)$  come convoluzione, nello spazio delle frequenze, dello spettro  $S(f)$  e del filtro  $W(f)$  con risposta impulsiva data dalla finestra triangolare. Otteniamo

$$S_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f-f') W(f') df'$$

dove

$$\begin{aligned} W(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T e^{-i2\pi ft} e^{i2\pi fs} dt ds \\ &= \frac{1}{T} \left| \int_0^T e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 = \frac{1}{T} \left| \frac{e^{i2\pi fT} - 1}{i2\pi f} \right|^2 \end{aligned}$$

ovvero la risposta in frequenza della finestra triangolare è data da

$$W(f) = \frac{1}{T} \left( \frac{\sin \pi f T}{\pi f} \right)^2$$

Osserviamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(f) df = w(0) = 1$$

La funzione  $W(f)$  è concentrata attorno a  $f = 0$  con una larghezza di banda in frequenza dell'ordine di  $2/T$ . Nota che

$$\frac{\int_{-1/T}^{1/T} W(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} W(f) df} = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = 0.903$$

Se  $T$  è abbastanza grande in modo tale che  $S(f)$  sia approssimativamente costante in ogni intervallo di lunghezza  $2/T$ ,

allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f - f') W(f') df' \cong S(f)$$

Per avere un'idea delle correzioni, sviluppiamo  $S(f - f')$  attorno ad  $f'$  ed integriamo:

$$\begin{aligned} S_T(f) &\cong S(f) \\ &+ \frac{1}{2T^2} S''(f) \int_{-1}^1 x^2 \left( \frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx + \dots \\ &= S(f) + \frac{1}{2\pi^2 T^2} S''(f) + O(T^{-4}) \end{aligned}$$

Quindi  $S(f)$  è approssimativamente costante in ogni intervallo di lunghezza  $2/T$ , se  $|T^2 S''(f)| \ll |S(f)|$ .

Nel limite  $T \rightarrow \infty$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_T(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ |X_T(f)|^2 \right\} = S(f)$$

ovvero il valore di aspettazione del periodogramma per finestra di osservazione dei dati infinita è dato dallo spettro.

# Esempio di Periodogramma

Consideriamo il processo stocastico con correlazione

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\gamma} e^{-\gamma|\tau|}$$

e spettro

$$S(f) = \frac{\sigma^2}{(2\pi f)^2 + \gamma^2}$$

La stima del periodogramma è data da

$$\begin{aligned} S_T(f) &= \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) R(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= 2 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) R(t) \cos(2\pi ft) dt \\ &= 2 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\sigma^2}{2\gamma} e^{-\gamma t} \cos(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

ed il rapporto

$$\frac{S(f) - S_T(f)}{S(f)} = \frac{(\gamma^2 - (2\pi f)^2) (1 - e^{-\gamma T} \cos(2\pi fT))}{\gamma T (\gamma^2 + (2\pi f)^2)} + \frac{e^{-\gamma T} 2\gamma (2\pi f) \sin(2\pi fT)}{\gamma T (\gamma^2 + (2\pi f)^2)}$$

chiaramente si annulla per  $T \rightarrow \infty$ .

# Inconsistenza del Periodogramma

La stima di  $S(f)$  tramite la misura del periodogramma è tuttavia inconsistente in quanto la varianza del periodogramma in generale non si annulla per  $T \rightarrow \infty$ . Mostriamo questo problema nel caso di processi stocastici gaussiani reali con correlazioni date da

$$\mathbb{E} \{x(t)\} = 0$$

$$\mathbb{E} \{x(t) x(s)\} = R(t - s)$$

$$\mathbb{E} \{x(t) x(s) x(u)\} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{x(t) x(s) x(u) x(v)\} &= R(t - s) R(u - v) \\ &+ R(t - u) R(s - v) + R(t - v) R(s - u) \end{aligned}$$

In questo caso

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ P_T^2(f) \right\} &= 2 \mathbb{E} \left\{ P_T(f) \right\}^2 \\ &+ \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T dt \int_0^T du R(t - u) e^{-i2\pi f(t+u)} \right|^2 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\mathbb{E} \left\{ P_T^2(f) \right\} \geq 2 \mathbb{E} \left\{ P_T(f) \right\}^2$$

e

$$E \left\{ P_T^2 (f) \right\} - E \left\{ P_T (f) \right\}^2 \geq E \left\{ P_T (f) \right\}^2$$

L'espressione precedente mostra che la varianza di  $P_T (f)$ , dove

$$P_T (f) = \frac{1}{T} |X_T (f)|^2$$

non si annulla per  $T \rightarrow \infty$  per ogni valore della frequenza con  $S (f) > 0$ .

Quindi la variabile stocastica  $P_T (f)$  non converge in media al valore dello spettro  $S (f)$  per ogni valore di  $f$  tale che  $S (f) > 0$ .

Per ovviare al problema dell'inconsistenza del periodogramma e quindi ad una non precisa determinazione del processo stocastico in esame, l'analisi spettrale moderna usa come mezzo principale d'indagine l'identificazione del modello dinamico del rumore in esame.

Il modello dinamico del rumore in esame è cercato nella classe dei modelli autoregressivi a media mobile, modelli ARMA, ed alla misura (inconsistente) dello spettro viene sostituita la misura (consistente), naturalmente più laboriosa, dei parametri ARMA.

# Ergodicità

Nelle applicazioni pratiche della teoria dei processi stocastici spesso dobbiamo valutare i parametri del processo stocastico in esame avendo a disposizione una sola realizzazione del processo su un intervallo temporale finito.

Sorge quindi il problema di sostituire le medie sulle realizzazioni del processo con un'unica media su un campione limitato nel tempo. Un esempio di è dato dal calcolo della media di un processo reale  $\{x(t)\}$ . Una stima della media è data dalla misura della quantità

$$\xi_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Naturalmente la stima non ha senso se il valore di aspettazione  $E\{x(t)\}$  dipende dal tempo.

Per processi stazionari la media di  $x(t)$  tende a  $E\{x(t)\}$  per lunghezza infinita del campione misurato. La possibilità di sostituire medie sulle realizzazioni con medie su campioni finiti è l'argomento dell'ergodicità.

Tornando a  $\xi_T$ , dobbiamo dimostrare che il valore di aspettazione di  $\xi_T$  non dipende da  $T$ , ovvero la stima  $\xi_T$  è una stima senza bias della media del processo stocastico stazionario  $x(t)$ , e che la varianza di  $\xi_T$  si annulla per  $T \rightarrow \infty$ .

La prima dimostrazione (assenza di bias) è molto semplice. Supponiamo che

$$E \{x(t)\} = \mu_x$$

con  $\mu_x$  indipendente dal tempo, allora

$$E \{\xi_T\} = \frac{1}{T} \int_0^T E \{x(t)\} dt = \mu_x$$

quindi la variabile stocastica  $\xi_T$  è una stima senza bias di  $\mu_x$ . Per dimostrare che  $\xi_T \rightarrow \mu_x$  in valor medio calcoliamo la varianza di  $\xi_T$ :

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= E \{ \xi_T^2 \} - \mu_x^2 \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_2 \int_0^T dt_1 \left( E \{ x(t_2) x(t_1) \} - \mu_x^2 \right) \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_2 \int_0^T dt_1 C(t_2 - t_1) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left( 1 - \frac{|\tau|}{T} \right) C(\tau) d\tau \end{aligned}$$

quindi la varianza di  $\xi_T$  è data da

$$\sigma_T^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right) C(\tau) d\tau$$

dove  $C(\tau)$  è la funzione di autocorrelazione del processo  $\{x(t)\}$ . Il risultato precedente è molto importante in quanto implica che un processo stocastico stazionario è ergodico in media se e solo se

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) C(\tau) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

La determinazione della varianza è utile non solo dal punto di vista teorico per stabilire l'ergodicità di un processo stocastico, ma è utile anche praticamente per stabilire quantitativamente se la stima  $\xi_T$  di  $\mu_x$  è statisticamente credibile.

Si può dimostrare che la probabilità che l'incognita  $\mu_x$  sia compresa tra  $\xi_T$  e  $\xi_T \pm 10\sigma_T$  è maggiore di 0.99. Quindi  $\xi_T$  è una stima soddisfacente di  $\mu_x$  se  $T$  è tale che  $\sigma_T \ll \xi_T$ .

## Esempio di sistema ergodico

Consideriamo il processo stocastico  $\{x(t)\}$  con correlazione

$$C(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\gamma} e^{-\gamma|\tau|}$$

In questo caso la varianza della stima della media è data da

$$\begin{aligned}\sigma_T^2 &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) C(\tau) d\tau \\ &= \frac{2C(0)}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) e^{-\gamma\tau} d\tau \\ &= \frac{2C(0)}{\gamma T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T}\right)\end{aligned}$$

Chiaramente  $\sigma_T \rightarrow 0$  per  $T \rightarrow \infty$ ; quindi il processo  $\{x(t)\}$  è in media ergodico. Se  $T\gamma \gg 1$  allora  $\sigma_T \propto 1/\sqrt{T}$ .

## Un commento

Concludiamo questa sezione con un commento. Spesso in letteratura lo scarto quadratico medio dalla media viene calcolato con la formula

$$\tilde{\sigma}_T^2 = \frac{C(0)}{T}$$

Osserviamo che la formula precedente è valida solo se i campioni  $x(t)$  a tempi diversi non sono correlati, ovvero solo se la funzione di autocorrelazione è del tipo

$$C(\tau) = C(0) \delta(\tau)$$

Infatti solo in questo caso

$$\begin{aligned}\sigma_T^2 &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) C(\tau) d\tau \\ &= \frac{2C(0)}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \delta(\tau) d\tau \\ &= \frac{2C(0)}{T} \frac{1}{2} = \frac{C(0)}{T} = \tilde{\sigma}_T^2\end{aligned}$$

# Ergodicità e Processi Discreti

Le considerazioni precedenti possono essere estese facilmente a processi con tempo discretizzato. Sia  $x[n]$  una sequenza di variabili stocastiche con

$$E \{x[n]\} = \mu_x$$

$$\begin{aligned} E \{(x[n] - \mu_x)(x[m] - \mu_x)\} &= C[n - m] \\ &= C[m - n] \end{aligned}$$

La stima della media  $\mu_x$  è la variabile stocastica con varianza

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= E \{(\xi_N - \mu_x)(\xi_N - \mu_x)\} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} C[n - m] \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) C[n] \\ &= \frac{C[0]}{N} + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) C[n] \end{aligned}$$

Osserviamo che se  $C[n] = c\delta[n]$  allora  $\sigma_N^2 = c/N$ .

Se  $C[n] = a^{|n|}$

$$\begin{aligned}\sigma_N^2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) a^{|n|} \\ &= \frac{1+a}{N(1-a)} \left[1 - \frac{2a(1-a^N)}{N(1-a^2)}\right]\end{aligned}$$

Posto  $a = \exp[-\gamma\varepsilon]$  e  $N = T/\varepsilon$ , per  $\varepsilon \rightarrow 0$  otteniamo

$$\sigma_N^2 = \frac{2}{\gamma T} \left(1 - \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma T}\right) + O(\varepsilon^2)$$

in accordo con i risultati del modello a tempo continuo.

# Campionamento di Segnali Continui

Supponiamo di campionare un segnale continuo  $x(t)$  periodicamente ogni  $T_s$  secondi. Otteniamo un segnale discreto  $x[n]$  dato da

$$x[n] = x(nT_s) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Se il segnale  $x(t)$  ha energia finita lo spettro è definito dalla relazione di Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

ed il segnale può essere ricostruito dallo spettro dalla relazione di Fourier inversa

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

Per il segnale campionato le relazioni di Fourier sono date da

$$X_s(f) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi fnT_s}$$

$$x[n] = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} X_s(f) e^{i2\pi fnT_s} df$$

dove  $f_s = 1/T_s$  è la frequenza di campionamento.

Cerchiamo ora la relazione tra lo spettro del segnale continuo e lo spettro del segnale campionato. Dalle espressioni degli spettri nel caso discreto e nel caso continuo otteniamo

$$\begin{aligned} X_s(f) &= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-i2\pi f n T_s} \\ &= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f') e^{i2\pi f' n T_s} e^{-i2\pi f n T_s} df' \end{aligned}$$

e usando la formula di Poisson

$$T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f n T_s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_s)$$

possiamo scrivere la relazione tra lo spettro  $X_s(f)$  del segnale discreto e lo spettro  $X(f)$  del segnale continuo nella forma:

$$X_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_s)$$

L'equazione precedente mostra che lo spettro discreto è dato dalla somma infinita di repliche (alias) dello spettro continuo. In particolare è impossibile, nel caso generale, ricostruire lo spettro continuo da quello discreto.

# Segnali a Banda Limitata

La ricostruzione senza repliche è possibile nel caso in cui

$$X(f) = 0 \quad |f| \geq \frac{1}{2T_s}$$

In questo caso

$$X(f) = \begin{cases} X_s(f) & |f| \leq \frac{1}{2T_s} \\ 0 & |f| > \frac{1}{2T_s} \end{cases}$$

Nel caso di segnali a banda limitata è possibile ricostruire il segnale continuo, senza perdita di informazioni, tramite la formula

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df = \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} X_s(f) e^{i2\pi ft} df \\ &= T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} e^{-i2\pi fnT_s} e^{i2\pi ft} df \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] T_s \frac{\sin \pi(t - nT_s)/T_s}{\pi(t - nT_s)} \end{aligned}$$

ovvero

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

dove

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

Nota che  $\text{sinc}(m - n) = \delta[m - n]$  e pertanto otteniamo una formula di interpolazione con nodi ai tempi  $t_n = nT_s$ . E' interessante osservare che il sistema di funzioni

$$\phi_{T_s, n}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , è un sistema ortonormale sulla retta reale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{T_s, n}(t) \phi_{T_s, m}(t) dt = \delta[n - m]$$

e pertanto

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{T_s, n}(t) \langle \phi_{T_s, n}, x \rangle$$

$$\langle \phi_{T_s, n}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{T_s, n}(t) x(t) dt$$

Nel caso di segnali a banda limitata  $\langle \phi_{T_s, n}, x \rangle = \sqrt{T_s} x[n]$ . Nel caso generale la formula di interpolazione rappresenta la proiezione del segnale generico  $x(t)$  sul sottospazio delle funzioni a banda limitata.

# Teorema di Nyquist e Shannon

La discussione precedente può essere riassunta nel teorema seguente:

Sia dato un segnale continuo con banda in frequenza limitata da  $f_{max}$ , ovvero con spettro non nullo per  $|f| \leq f_{max}$

$$X(f) = 0 \quad |f| > f_{max}$$

Nell'ipotesi precedente il segnale  $x(t)$  può essere ricostruito dai campioni a tempo discreto  $x[n] = x(nT_s)$ , ottenuti con la frequenza di campionamento  $f_s = 1/T_s$  purché la frequenza di campionamento sia tale che

$$f_s \geq 2f_{max}$$

Il segnale può essere ricostruito dalla formula di interpolazione

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin \pi(t - nT_s)/T_s}{(t - nT_s)/T_s}$$

con

$$T_s \leq \frac{1}{2f_{max}}$$

E' interessante osservare che la formula

$$X_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)$$

puó essere ottenuta valutando lo spettro del segnale

$$x_s(t) = x(t) \delta_{T_s}(t) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s)$$

dove  $\delta_{T_s}(t)$  è il "pettine di Dirac"

$$\delta_{T_s}(t) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

Infatti, usando il teorema di modulazione della trasformata di Fourier (ovvero lo spettro di un prodotto di due funzioni è uguale alla convoluzione degli spettri dei due fattori) otteniamo

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f') \Delta_{T_s}(f') df' \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f - f') \delta\left(f' - \frac{k}{T_s}\right) df' \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \end{aligned}$$

Il prodotto del segnale continuo e del "pettine di Dirac", è la rappresentazione matematica di un processo di campionamento ideale.

# Rumore Bianco a Banda Limitata

Consideriamo il campionamento discreto, alla frequenza di campionamento  $f_s$ , di rumore "bianco" a banda limitata con densità continua di potenza spettrale data da

$$S(f) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{per } |f| \leq f_{\max} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La banda è limitata dalla frequenza di Nyquist

$$f_{\max} = \frac{1}{2}f_s = \frac{1}{2T_s}$$

dove  $T_s$  è il tempo di campionamento.

Il rumore con lo spettro precedente ha correlazione data da

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi ft} df \\ &= 2\sigma^2 \int_0^{f_{\max}} \cos(2\pi ft) df \\ &= \frac{\sigma^2}{\pi t} \sin(2\pi f_{\max} t) \end{aligned}$$

A tempi discreti  $t_n = nT_s$  la correlazione è data da

$$r[n] = r(nT_s) = \frac{\sigma^2}{\pi n T_s} \sin(\pi n) = \frac{\sigma^2}{T_s} \delta[n]$$

Quindi per campionare una sequenza di rumore bianco a banda limitata è sufficiente considerare la sequenza  $x[n]$  con

$$x[n] = \sqrt{\frac{\sigma^2}{T_s}} w[n]$$

dove  $w[n]$  è un rumore gaussiano a media nulla e varianza unitaria,  $w[n] \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,

$$\langle w[n] \rangle = 0$$

$$\langle w[n] w[m] \rangle = \delta[n - m]$$

Le proprietà del secondo ordine della sequenza di rumore bianco a banda limitata ovvero valore medio, varianza e densità di potenza spettrale possono essere riprodotte a livello discreto anche generando la sequenza

$$x[n] = \sqrt{\frac{3\sigma^2}{T_s}} \left( u[n] - \frac{1}{2} \right)$$

con  $u[n]$  rumore con densità uniforme nell'intervallo  $[0, 1)$ ,  $u[n] \sim \mathcal{U}(0, 1)$ , ovvero

$$\langle u[n]^k \rangle = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

Osserviamo che per sequenze con un numero finito  $N$  di campioni, una stima della densità di potenza spettrale si ottiene dal

periodogramma

$$S[k] = \frac{T_s}{N} |X[k]|^2$$

dove  $X[k]$  è la trasformata discreta di Fourier della sequenza di rumore  $x[n]$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{i2\pi kn/N}$$

Infatti è facile mostrare che

$$\langle S[k] \rangle = \frac{T_s \sigma^2 N}{N T_s} = \sigma^2$$

Sottolineiamo che le considerazioni precedenti mostrano che sequenze discrete di rumore “bianco”, alla frequenza di campionamento  $f_s$ , sono in effetti l'approssimazione di un processo continuo con densità di potenza spettrale costante a frequenze  $|f| \leq f_s/2$ .

## Rumore Passa Basso — Caso Discreto

Consideriamo la sequenza  $x[n]$  definita da

$$x[n] = e^{-\gamma T_s} x[n-1] + \sqrt{\frac{1 - e^{-2\gamma T_s}}{2\gamma}} \sigma w[n]$$

con  $w[n] \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

E' facile mostrare che la correlazione del rumore stazionario vale

$$r[n] = \frac{\sigma^2}{2\gamma} e^{-\gamma T_s |n|}$$

Definiamo la densità di potenza spettrale discreta

$$S_d(f) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n] e^{-i2\pi f T_s n}$$

Nel nostro caso

$$\begin{aligned} S_d(f) &= T_s \frac{\sigma^2}{2\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma T_s |n|} e^{-i2\pi f T_s n} \\ &= T_s \frac{\sigma^2}{2\gamma} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma T_s n} \cos(2\pi f T_s n) \right) \end{aligned}$$

Usando la formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(\omega n + \phi) z^{-n} \\ = \frac{\cos \phi - r z^{-1} \cos(\omega - \phi)}{1 - 2r z^{-1} \cos \omega + r^2 z^{-2}}$$

otteniamo

$$S_d(f) = T_s \frac{\sigma^2}{2\gamma} \frac{1 - e^{-2\gamma T_s}}{1 - 2e^{-\gamma T_s} \cos(2\pi f T_s) + e^{-2\gamma T_s}}$$

Osserviamo che a frequenza nulla

$$S_d(0) = T_s \frac{\sigma^2}{2\gamma} \frac{1 + e^{-\gamma T_s}}{1 - e^{-\gamma T_s}}$$

Inoltre  $S_d(f)$  è una funzione periodica della frequenza

$$S_d\left(f + \frac{k}{T_s}\right) = S_d(f) \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Per  $f T_s \ll 1$ , ovvero per frequenze molto minori della frequenza di Nyquist,

$$S_d(f) \cong \frac{\sigma^2}{(2\pi f)^2 + \gamma^2}$$

Alla frequenza di Nyquist

$$S_d \left( \frac{1}{2T_s} \right) = T_s \frac{\sigma^2}{2\gamma} \frac{1 - e^{-2\gamma T_s}}{(1 + e^{-\gamma T_s})^2} = T_s \frac{\sigma^2}{2\gamma} \frac{1 - e^{-\gamma T_s}}{1 + e^{-\gamma T_s}}$$

Quindi per  $\gamma T_s \ll 1$ ,

$$S_d \left( \frac{1}{2T_s} \right) = S_d(0) \left( \frac{1 - e^{-\gamma T_s}}{1 + e^{-\gamma T_s}} \right)^2 \cong S_d(0) \frac{(\gamma T_s)^2}{4}$$

Poiché la  $S_d(f)$  è praticamente nulla alla frequenza di Nyquist la sequenza in esame descrive un rumore passabasso con densità continua di potenza spettrale data da

$$S(f) \cong \frac{\sigma^2}{(2\pi f)^2 + \gamma^2} \quad |f| < \frac{1}{2T_s}$$

# Sistemi Lineari

Sia  $u(t)$  un processo stocastico, ad esempio il rumore sismico del sito sperimentale. In un apparato come VIRGO il processo  $u(t)$  viene filtrato da una catena di pendoli ed il processo osservato  $x(t)$  è in generale della forma

$$x(t) = T[u(t)]$$

dove  $T$  rappresenta l'operatore del sistema.

L'esperimento è progettato in modo tale che la relazione tra l'input  $u(t)$  e l'output  $x(t)$  sia lineare e quindi assumeremo nel seguito che

$$x(t) = L[u(t)]$$

con  $L$  operatore lineare.

Come esempio noto di sistema lineare, possiamo pensare al moto browniano di un oscillatore smorzato soggetto ad una forza random:

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + m\omega_0^2x(t) = u(t)$$

Il processo  $u(t)$  è rumore bianco con potenza spettrale

$$S_{uu}(f) = 2k_B T \gamma$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann e  $T$  è la temperatura.

# Funzione Impulsiva

I sistemi lineari, che soddisfano il principio di sovrapposizione, possono essere caratterizzati dalla risposta di sistema impulsiva  $h(t, t')$ :

$$h(t, t') = L[\delta(t')]$$

che rappresenta la risposta del sistema ad un impulso unitario applicato al tempo  $t'$ . L'output  $x(t)$  è dato dall'integrale di convoluzione

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t') u(t') dt'$$

Se il sistema è invariante sotto traslazioni temporali, l'integrale di convoluzione diventa

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t') u(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t') u(t - t') dt' \end{aligned}$$

Per sistemi causali

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

# Sistemi Lineari Causali

Nel seguito ci limiteremo a sistemi lineari causali invarianti sotto traslazioni temporali e considereremo solo relazioni lineari del tipo

$$x(t) = L_h[u(t)] = \int_0^{\infty} h(t') u(t - t') dt'$$

La relazione precedente permette di definire facilmente la funzione di trasferimento del sistema come la trasformata di Laplace della funzione di risposta impulsiva  $h(t)$

$$\mathcal{H}(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

che definisce la relazione di input-output

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{H}(s) \mathcal{U}(s)$$

Conoscendo la trasformata di Laplace, con la rotazione  $s = i2\pi f$ , otteniamo la relazione nel dominio delle frequenze

$$X(f) = H(f) U(f)$$

e la relazione utile per la determinazione sperimentale della funzione di trasferimento del sistema tramite la risposta ad una forza deterministica di riferimento:

$$H(f) = \frac{X_r(f)}{U_r(f)}$$

# Processo Stocastico di Convoluzione

Consideriamo il processo stocastico  $u(t)$  ed il processo ottenuto dalla convoluzione tra  $u(t)$  e la funzione  $h(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t') u(t') dt'$$

La funzione  $h(t)$  ha trasformata di Fourier

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Assegnata la correlazione e lo spettro del processo  $u(t)$

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= E \{u(t) u(t - \tau)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(f) e^{i2\pi f\tau} df \end{aligned}$$

per il processo  $x(t)$  abbiamo

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E \{x(t) x(t - \tau)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_{uu}(f) e^{i2\pi f\tau} df \end{aligned}$$

e l'importante relazione

$$S_{xx}(f) = |H(f)|^2 S_{uu}(f)$$

# Trasformata Zeta

La trasformata  $z$  è l'equivalente della trasformata di Laplace per sequenze a tempi discreti. La trasformata  $z$  di una funzione del tempo  $x(t)$ , dove  $t$  è non negativo, o di una sequenza di valori  $x(nT_s)$ , dove  $n$  è un intero non negativo,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e  $T_s$  è il tempo di campionamento, è definita dall'equazione

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(z) &= \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(nT_s)] = \mathcal{Z}[x[n]] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}\end{aligned}$$

ovvero

$$\mathcal{X}(z) = x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \dots$$

Se una funzione  $x(t)$  presenta una discontinuità per  $t = 0$ , assumeremo che  $x(0)$  sia uguale a  $x(0+)$ .

# Trasformata Zeta: Esempi

Funzione Theta

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(z) &= \mathcal{Z}[\theta(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}\end{aligned}$$

Funzione Seno

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(z) &= \mathcal{Z}[\sin(\omega t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\omega T_s) z^{-n} \\ &= \frac{z \sin(\omega T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}\end{aligned}$$

Funzione Coseno

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(z) &= \mathcal{Z}[\cos(\omega t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\omega T_s) z^{-n} \\ &= \frac{z^2 - z \cos(\omega T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}\end{aligned}$$

# Trasformata Zeta: Proprietà

Proprietà sotto traslazione temporale

- $\mathcal{Z} [x (t - kT_s)] = z^{-k} \mathcal{Z} [x (t)]$
- $\mathcal{Z} [x (t + kT_s)] = z^k \left( \mathcal{Z} [x (t)] - \sum_{n=0}^{k-1} x (nT_s) z^{-n} \right)$

Teorema del valore iniziale

$$x (0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{X} (z)$$

Teorema del valore finale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x (nT_s) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \mathcal{X} (z) \right]$$

Teorema della derivata

$$\mathcal{Z} \left[ n^k x [n] \right] = \left( -z \frac{d}{dz} \right)^k \mathcal{X} (z)$$

## Trasformata Zeta: Proprietà (Cont.)

Teorema di Convoluzione

Consideriamo le funzioni  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , dove

$$x_1(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

$$x_2(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

Assumiamo che  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  siano  $z$ -trasformabili con trasformate  $\mathcal{X}_1(z)$  e  $\mathcal{X}_2(z)$ .

Consideriamo ora la convoluzione discreta di  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$

$$x_3[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k] x_2[n - k]$$

allora

$$\mathcal{X}_3(z) = \mathcal{X}_1(z) \mathcal{X}_2(z)$$

# Trasformata Zeta: Formula d'Inversione

$$\mathcal{Z}^{-1} [\mathcal{X} (z)] = x [n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathcal{X} (z) z^{n-1} dz$$

dove  $C$  è un cerchio percorso in senso antiorario con centro nell'origine di  $z$  che comprende tutti i poli di  $\mathcal{X} (z) z^{n-1}$ .

Posto (vedi passaggio da trasformata di Laplace e trasformata di Fourier)

$$z = e^{-i2\pi f}$$

otteniamo

$$X (f) = \mathcal{X} (z) |_{z=e^{-i2\pi f}}$$

ovvero

$$X (f) = \sum_{n=0}^{\infty} x [n] e^{-i2\pi n f}$$

e

$$x [n] = \int_{-1/2}^{1/2} X (f) e^{i2\pi n f} df$$

## Dimostrazioni

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x[n-k]] &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k] z^{-n} \\ &= x[0] z^{-k} + x[1] z^{-k-1} + x[2] z^{-k-2} + \dots \\ &= z^{-k} \left( x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \dots \right) \\ &= z^{-k} \mathcal{X}(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x[n+k]] &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k] z^{-n} \\ &= x[k] + x[k+1] z^{-1} + x[k+2] z^{-2} + \dots \\ &= z^k \left( x[k] z^{-k} + x[k+1] z^{-k-1} + \dots \right) \\ &= z^k \left( x[k] z^{-k} + x[k+1] z^{-k-1} + \dots \right) \\ &= z^k \left( \mathcal{X}(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n] z^{-n} \right)\end{aligned}$$

# Sistemi Lineari Discreti

Data la sequenza di ingresso  $\{u[n]\}$  e la sequenza di uscita  $\{x[n]\}$  la relazione lineare causale più generale tra le due sequenze è data da

$$\begin{aligned}x[n] + a_1x[n-1] + \dots + a_Px[n-p] \\ = b_0u[n] + b_1u[n-1] + \dots + b_Qu[n-Q]\end{aligned}$$

Se  $P = 0$  il processo  $x[n]$  è detto processo a media mobile di ordine  $Q$  e indicato con  $MA(Q)$

$$x[n] = b_0u[n] + b_1u[n-1] + \dots + b_Qu[n-Q]$$

Se  $Q = 0$  il processo  $x[n]$  è detto processo autoregressivo di ordine  $P$  e indicato con  $AR(P)$

$$x[n] + a_1x[n-1] + \dots + a_Px[n-p] = b_0u[n]$$

Nel caso generale,  $P \neq 0$  e  $Q \neq 0$ , il processo  $x[n]$  è detto processo  $ARMA(P, Q)$ .

Nel seguito per semplificare la notazione useremo  $a_0 = 1$ .

## Sistemi Lineari Discreti nello spazio $Z$

Il processo ARMA ( $P, Q$ )

$$\sum_{p=0}^P a_p x[n-p] = \sum_{q=0}^Q b_q u[n-q]$$

nello spazio  $Z$  diventa

$$\sum_{p=0}^P a_p z^{-p} \mathcal{X}(z) = \sum_{q=0}^Q b_q z^{-q} \mathcal{U}(z)$$

e quindi

$$\mathcal{X}(z) = \mathcal{H}(z) \mathcal{U}(z)$$

con funzione di trasferimento razionale data da

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{B}(z)}{\mathcal{A}(z)}$$

con

$$\mathcal{A}(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}$$

$$\mathcal{B}(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}$$

Nel seguito, con abuso di notazione, indicheremo con  $z$  anche l'operatore di traslazione temporale discreta e indicheremo un processo ARMA ( $P, Q$ ) con la notazione abbreviata

$$\mathcal{A}(z) x[n] = \mathcal{B}(z) u[n]$$

# Filtro Adattato (Matched Filter)

## Problema della Massimizzazione del Rapporto Segnale Rumore.

Consideriamo un segnale  $x(t)$  composto da un segnale deterministico  $s(t)$  e da un rumore stazionario  $\eta(t)$

$$x(t) = s(t) + \eta(t)$$

Il rumore  $\eta(t)$  ha media nulla e correlazione data da

$$r(\tau) = \mathbb{E} \{ \eta(t) \eta(t + \tau) \}$$

Per rivelare il segnale deterministico di durata  $T$  con inizio al tempo  $t_0$  e fine al tempo  $t_m = t_0 + T$ , useremo un filtro lineare causale di lunghezza  $T$ , adattato al segnale  $s(t)$  in presenza di rumore  $\eta(t)$ , in modo che il rapporto segnale rumore (SNR) sia massimo al tempo  $t_m$ .

Indichiamo con  $y(t)$  l'uscita del filtro avente come ingresso  $x(t)$

$$y(t) = \int_0^T h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

Sia  $y_s(t)$  l'uscita con ingresso  $s(t)$  e  $y_\eta(t)$  l'uscita con ingresso  $\eta(t)$

$$y_s(t) = \int_0^T h(\tau) s(t - \tau) d\tau$$

$$y_\eta(t) = \int_0^T h(\tau) \eta(t - \tau) d\tau$$

Il rapporto segnale rumore al tempo  $t_m$  è dato da

$$\text{SNR}(t_m) = \frac{y_s^2(t_m)}{\mathbb{E}\{y_\eta^2(t_m)\}} = \frac{y_s^2(t_m)}{\sigma^2(h)}$$

dove

$$\sigma^2(h) = \int_0^T dt_2 \int_0^T dt_1 h(t_2) r(t_2 - t_1) h(t_1)$$

Per procedere nella ricerca del massimo di  $\text{SNR}(t_m)$ , introduciamo la diagonalizzazione di Karhunen e Loève della funzione di correlazione del rumore. L'equazione integrale

$$\int_0^T r(t - \tau) \phi_k(\tau) d\tau = \lambda_k \phi_k(t)$$

definisce un insieme di autovalori positivi  $\lambda_k$  ed un sistema associato di autofunzioni  $\phi_k(t)$  ortonormali nell'intervallo  $[0, T]$

$$\int_0^T \phi_m(\tau) \phi_k(\tau) d\tau = \delta[m - k]$$

Sviluppando  $h(t)$  e  $s(t_m - t)$  tramite la base  $\phi_k(t)$

$$h(t) = \sum_k h_k \phi_k(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s(t_m - t) = \sum_k s_k \phi_k(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

dove

$$h_k = \int_0^T \phi_k(t) h(t) dt$$

$$s_k = \int_0^T \phi_k(t) s(t_m - t) dt$$

e osservando che

$$\sigma^2(h) = \sum_k \lambda_k h_k^2$$

$$y(t_m) = \sum_k h_k s_k$$

possiamo riscrivere  $\text{SNR}(t_m)$  nella forma

$$\text{SNR}(t_m) = \frac{\left( \sum_k h_k s_k \right)^2}{\sum_k \lambda_k h_k^2}$$

Per trovare il massimo di  $\text{SNR}(t_m)$  usiamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \left( \sum_k h_k s_k \right)^2 &= \left( \sum_k \sqrt{\lambda_k} h_k \frac{s_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right)^2 \\ &\leq \sum_k \lambda_k h_k^2 \sum_k \frac{s_k^2}{\lambda_k} \end{aligned}$$

che permette di concludere che

$$\text{SNR}(t_m) \leq \sum_k \frac{s_k^2}{\lambda_k}$$

con il segno di uguaglianza per

$$h_k = \alpha \frac{s_k}{\lambda_k}$$

con  $\alpha$  costante non nulla arbitraria.

Usando la relazione

$$r^{-1}(t - \tau) = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \phi_k(t) \phi_k(\tau)$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}h(t) &= \sum_k h_k \phi_k(t) = \alpha \sum_k \frac{s_k}{\lambda_k} \phi_k(t) \\&= \alpha \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \phi_k(t) \int_0^T \phi_k(\tau) s(t_m - \tau) d\tau \\&= \alpha \int_0^T r^{-1}(t - \tau) s(t_m - \tau) d\tau\end{aligned}$$

Il filtro adattato ottimo è quindi, per  $0 \leq t \leq T$ , dato da

$$h(t) = \alpha \int_0^T r^{-1}(t - \tau) s(t_m - \tau) d\tau$$

In modo analogo il rapporto segnale rumore massimo è dato da

$$\begin{aligned}\text{SNR}(t_m) &= \sum_k \frac{s_k^2}{\lambda_k} \\&= \int_0^T dt_2 \int_0^T dt_1 \\&\quad \times s(t_m - t_2) r^{-1}(t_2 - t_1) s(t_m - t_1)\end{aligned}$$

Nel caso di rumore bianco con correlazione

$$r(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

la formula per il filtro adattato è molto semplice

$$h(t) = \frac{\alpha}{\sigma^2} s(t_m - t) \quad 0 \leq t \leq T$$

con rapporto segnale rumore proporzionale all'energia del segnale

$$\begin{aligned} \text{SNR}(t_m) &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^T s^2(t_m - t) dt \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt \end{aligned}$$

## Filtro Adattato (caso discreto)

Consideriamo una sequenza di dati  $\{x[n]\}$  con  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Supponiamo che la sequenza osservata sia la sovrapposizione di un segnale deterministico  $\{s[n]\}$  ed un rumore stazionario  $\{\eta[n]\}$ . Il segnale deterministico è non nullo per un'intervallo temporale di lunghezza  $M$  a partire dal tempo  $n_0$ , ovvero

$$s[n] \neq 0 \quad n_0 \leq n \leq n_M = n_0 + M - 1$$

con  $n_0 \geq 0$  e  $n_M < N$ . Consideriamo il problema di rivelare il segnale deterministico  $\{s[n]\}$  immerso nel rumore  $\{\eta[n]\}$  con un filtro FIR causale  $H$  di lunghezza  $M$ . L'obiettivo è di disegnare  $H$  in modo tale che l'uscita del filtro sia massima al tempo  $n_M$ . L'ingresso del filtro è dato dal segnale complessivo

$$x[n] = s[n] + \eta[n]$$

per  $n = M - 1, \dots, N - 1$ . L'uscita di  $H$ , filtro FIR causale di lunghezza  $M$ , può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} y[n] &= h[0] x[n] + h[1] x[n - 1] \\ &\quad + \dots + h[M - 1] x[n - M + 1] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} h[m] x[n - m] \end{aligned}$$

Poiché  $H$  è lineare, possiamo scrivere

$$y[n] = y_s[n] + y_\eta[n]$$

L'obiettivo è di disegnare il filtro  $H$  in modo tale che il rapporto segnale rumore (SNR)

$$\text{SNR}[n] = \frac{|y_s[n]|^2}{\text{E} \left\{ |y_\eta[n]|^2 \right\}}$$

sia massimo al tempo  $n = n_M$ . Per  $n = n_M$  l'uscita del filtro è

$$y[n_M] = \sum_{m=0}^{M-1} h[m] x[n_M - m] = h^T \tilde{x} = x^T \tilde{h}$$

dove con la notazione "tilde" su un vettore  $v$  indichiamo la seguente operazione sulle componenti di  $v$

$$\tilde{v}[m] = v[n_M - m]$$

quindi se

$$v = [v[n_M] \quad v[n_M - 1] \quad \dots \quad v[n_0]]^T$$

allora

$$\tilde{v} = [v[n_0] \quad v[n_0 + 1] \quad \dots \quad v[n_M]]^T$$

Dalle definizioni

$$y_s [n_M] = h^T \tilde{s} = \tilde{s}^T h = s^T \tilde{h} = \tilde{h}^T s$$

$$y_\eta [n_M] = h^T \tilde{\eta} = \tilde{\eta}^T h = \eta^T \tilde{h} = \tilde{h}^T \eta$$

La potenza dell'uscita di  $H$  in presenza di solo segnale deterministico è data da

$$|y_s [n_M]|^2 = \left( h^H \tilde{s}^* \right) \left( \tilde{s}^T h \right) = h^H S h$$

con

$$S = \tilde{s}^* \tilde{s}^T$$

dove abbiamo usato  $v^*$  per indicare la coniugazione complessa di  $v$  e  $v^H$  per indicare la trasposta del vettore  $v^*$ .

Nel seguito assumeremo che il rumore  $\eta[n]$  sia stazionario con media nulla e matrice di correlazione  $R_\eta$  data da

$$R_\eta = \mathbb{E} \left\{ \eta \eta^H \right\}$$

o per componenti

$$\begin{aligned} R_\eta [p, q] &= \mathbb{E} \left\{ \eta [p] \eta^* [q] \right\} \\ &= r_\eta [p - q] = r_\eta^* [q - p] \\ &= R_\eta^* [q, p] \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \tilde{\eta}^* [p] \tilde{\eta} [q] \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \eta [n_M - q] \eta^* [n_M - p] \right\} \\ &= r_\eta [p - q] \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbb{E} \left\{ \tilde{\eta}^* \tilde{\eta}^T \right\} = R_\eta$$

La potenza media dell'uscita di  $H$  in presenza di solo rumore è data da

$$\mathbb{E} \left\{ |y_\eta [n_M]|^2 \right\} = E \left\{ \left( h^H \tilde{\eta}^* \right) \left( \tilde{\eta}^T h \right) \right\} = h^H R_\eta h$$

ed il rapporto segnale rumore al tempo  $n_M$  può essere scritto nella forma

$$\text{SNR} [n_M] = \frac{h^H S h}{h^H R_\eta h}$$

Consideriamo per primo il caso di rumore bianco. La matrice di correlazione in questo caso è multipla della matrice identità  $M \times M$

$$R_\eta = \sigma^2 I$$

Osserviamo ora che la matrice  $S = \tilde{s}^* \tilde{s}^T$  ha rango 1 in quanto ogni vettore  $v$  viene proiettato da  $S$  lungo  $\tilde{s}^*$ ,  $Sv \propto \tilde{s}^*$ , e quindi

è possibile risolvere la matrice identità nella forma

$$I = \sum_{m=0}^{M-1} \phi_m \phi_m^H \quad \phi_m^H \phi_{m'} = \delta [m - m']$$

con

$$\phi_0 = \frac{\tilde{s}^*}{\sqrt{\tilde{s}^T \tilde{s}^*}}$$

e quindi

$$\text{SNR} [n_M] = \frac{\tilde{s}^T \tilde{s}^* h^H \phi_0 \phi_0^H h}{\sigma^2 h^H h}$$

A questo punto possiamo scrivere la risposta impulsiva del filtro  $H$  nella base ortonormale dei vettori  $\phi_m$  e poiché  $h$  è definito a meno di un fattore moltiplicativo possiamo porre

$$h = \phi_0 + \sum_{m=1}^{M-1} c [m] \phi_m$$

e scrivere

$$\text{SNR} [n_M] = \frac{\tilde{s}^T \tilde{s}^*}{\sigma^2} \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} |c [m]|^2}$$

Chiaramente  $\text{SNR} [n_M]$  è massimo per

$$c [m] = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M - 1$$

e quindi, per rumore bianco, il valore massimo del rapporto segnale rumore è

$$\text{SNR} [n_M] = \frac{\tilde{\mathbf{s}}^T \tilde{\mathbf{s}}^*}{\sigma^2} = \frac{\tilde{\mathbf{s}}^H \tilde{\mathbf{s}}}{\sigma^2}$$

con il filtro ottimo dato da

$$h = \frac{\tilde{\mathbf{s}}^*}{\sqrt{\mathbf{s}^H \mathbf{s}}}$$
$$\tilde{h}^T = \frac{\mathbf{s}^H}{\sqrt{\mathbf{s}^H \mathbf{s}}}$$

Pertanto il filtro ottimo è adattato al segnale da rivelare nel senso che  $h$  è proporzionale al segnale coniugato e riflesso nel tempo. Osserviamo che l'output del filtro adattato

$$y [n_M] = h^T \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{s}^H \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{s}^H \mathbf{s}}}$$

può essere anche interpretato come l'output di una finestra  $w[0], w[1], \dots, w[M-1]$  applicata al segmento di dati  $x[n_0], x[n_0+1], \dots, x[n_0+M-1]$ , con

$$w = \tilde{h} = \frac{\mathbf{s}^*}{\sqrt{\mathbf{s}^H \mathbf{s}}}$$

Consideriamo ora il caso di rumore colorato. Invece di risolvere direttamente il problema di massimizzazione del rapporto segnale rumore, mostriamo come la soluzione nel caso di rumore colorato

si possa ottenere immediatamente da quella ottenuta nel caso di rumore bianco. L'idea è di rendere bianco il rumore colorato e poi applicare il filtro adattato. Per rendere bianco il rumore colorato usiamo la scomposizione di Choleski di  $R_\eta^{-1}$ . Poiché  $R_\eta$  e  $R_\eta^{-1}$  sono matrici hermitiane, possiamo scrivere

$$R_\eta^{-1} = U^H U$$

e

$$R_\eta = U^{-1} U^{-H} = E \left\{ \eta \eta^H \right\}$$

Consideriamo ora la sequenza

$$\eta_U = U \eta$$

Poiché

$$\begin{aligned} E \left\{ \eta_U \eta_U^H \right\} &= E \left\{ U \eta \eta^H U^H \right\} = U R_\eta U^H \\ &= U U^{-1} U^{-H} U^H = I \end{aligned}$$

la sequenza  $\eta_U$  è una sequenza di rumore bianco con media nulla e varianza uno,  $\eta_U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

A questo punto la strategia è chiara. Invece della sequenza originale  $x$  consideriamo la sequenza  $x_U$  definita da

$$x_U = Ux = s_U + \eta_U$$

Il risultato del filtro adattato al tempo  $n_M$  è dato da

$$y[n_M] = w_U^T x_U$$

con

$$w_U^T = \frac{s_U^H}{\sqrt{s_U^H s_U}} = \frac{s^H U^H}{\sqrt{s^H U^H U s}} = \frac{s^H U^H}{\sqrt{s^H R_\eta^{-1} s}}$$

Quindi

$$y[n_M] = w_U^T x_U = \frac{s^H U^H U x}{\sqrt{s^H R_\eta^{-1} s}} = \frac{s^H R_\eta^{-1} x}{\sqrt{s^H R_\eta^{-1} s}}$$

e

$$\text{SNR}[n_M] = s_U^H s_U = s^H R_\eta^{-1} s$$

Nella notazione del filtro FIR la risposta impulsiva  $h$  nel caso di rumore colorato è

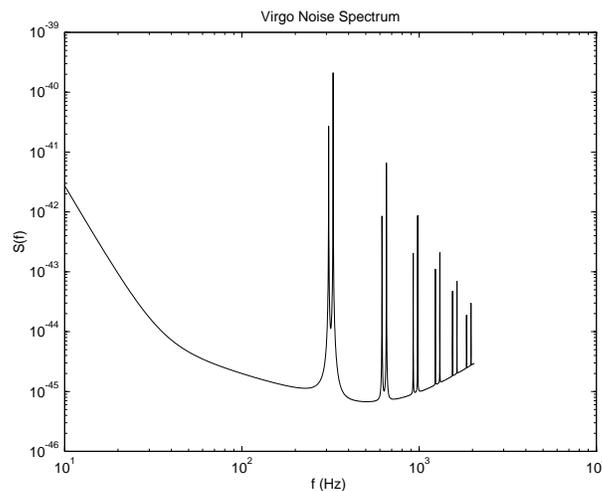
$$h = \frac{1}{\sqrt{s^H R_\eta^{-1} s}} R_\eta^{-1} \tilde{s}^*$$

# Studio del Rumore

Uno dei problemi principali, preliminare ad ogni sistema di rivelazione di onde gravitazionali, è la conoscenza della figura di spettro del rumore in interferometri a larga banda come LIGO e VIRGO.

Chiaramente la conoscenza dettagliata delle caratteristiche dinamiche delle componenti dell'apparato e delle possibili sorgenti di rumore (sismico, termico, shot-noise, ecc.) sono indispensabili per una determinazione iniziale della figura dello spettro.

La più recente curva di sensibilità di VIRGO (vedi il lavoro di G. Cagnoli et al.) che tiene conto delle numerose sorgenti di rumore e delle specifiche dell'apparato è data da



Spettro del Rumore di VIRGO

La figura precedente si riferisce ad un'accurata valutazione teorica delle varie funzioni di trasferimento presenti nell'apparato sperimentale ed ad una stima la più precisa possibile dell'intensità delle varie sorgenti di rumore. È chiaro che le caratteristiche reali di un apparato complesso come un interferometro in funzione saranno leggermente diverse da quelle previste teoricamente in quanto i parametri reali di funzionamento possono essere conosciuti solo con il sistema completamente funzionante in modo indiretto tramite la misura sperimentale delle funzioni di trasferimento reali. Inoltre i parametri reali dell'apparato possono presentare effetti di deriva, effetti non stazionari, effetti non lineari, ecc.

Poiché le stime sui possibili segnali gravitazionali rivelabili dall'interferometro portano a rapporti segnale/rumore molto piccoli è indispensabile per una corretta rivelazione dei segnali gravitazionali distinguere chiaramente un possibile segnale dal fondo di rumore dell'apparato.

Per separare un segnale utile da rumore è necessario monitorare continuamente lo spettro del rumore in modo da poter eseguire con la massima precisione possibile la sottrazione del fondo rumoroso dal segnale osservabile sperimentalmente.

# Rivelazione di Segnali in Rumore Bianco

Consideriamo un segnale utile  $u[n]$  immerso in rumore bianco  $v[n]$ , a media nulla e varianza  $\sigma^2$ , e supponiamo che il segnale osservato sia

$$x[n] = u[n] + v[n]$$

Per rivelare la presenza del segnale utile basta misurare l'energia del segnale osservato

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2 = \sum_{n=0}^{N-1} u[n]^2 + N\sigma^2 \\ &= E_u + E_v \end{aligned}$$

Se il rapporto segnale rumore è tale che

$$\frac{E_x}{E_v} - 1 = \frac{E_u}{E_v} \gg 0$$

allora possiamo concludere che oltre al rumore bianco è presente un'altro segnale. Se conosciamo a priori il valore di  $E_u$  allora possiamo concludere con un certo livello di confidenza che abbiamo rivelato un segnale noto  $u[n]$  in un fondo di rumore bianco noto  $v[n]$ .

# Rivelazione di Segnali in Rumore Colorato

Per poter applicare le tecniche di rivelazione di segnali utili in fondo di rumore colorato, una pratica molto seguita nell'analisi digitale dei segnali consiste nei passi seguenti:

1. Identificazione adattiva dello spettro del rumore usando modelli di tipo autoregressivo a media mobile tramite cui sia possibile identificare e parametrizzare in modo conveniente la funzione del sistema in esame.
2. Nota la funzione di sistema, trasformare il rumore colorato in rumore bianco tramite il filtro inverso a quello di sistema (Filtro Imbiancante o Filtro di Whitening)
3. Eseguire misure di energia del segnale osservato.
4. Confrontare il rapporto segnale rumore con valori di soglia prefissati.
5. Validare con metodi statistici una delle due ipotesi:

$$\begin{cases} H_0 & \text{assenza di segnale utile} \\ H_1 & \text{presenza di segnale utile} \end{cases}$$

# Teorema di Wold

La riduzione di un rumore colorato a rumore bianco è sempre possibile in quanto è possibile dimostrare (Teorema di Wold) che ogni sequenza  $x[n]$  di rumore stazionario gaussiano con spettro continuo non negativo è linearmente equivalente ad una sequenza di rumore bianco  $w[n]$ :

$$w[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a[k] x[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] w[n-k]$$

dove

$$E\{w[n]\} = 0 \quad E\{w[n]w[0]\} = \sigma^2\delta[n] \quad (1)$$

Lo spettro complesso della sequenza di rumore colorato  $x[n]$  è dato da

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{xx}(z) &= \sigma^2 \mathcal{H}(z) \mathcal{H}(1/z) \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\mathcal{A}(z) \mathcal{A}(1/z)} \end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a[n] z^{-n} \quad \text{Filtro Imbiancante}$$

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \quad \text{Funzione di Sistema}$$

Nel dominio delle frequenze abbiamo

$$S_{xx}(f) = \mathcal{S}_{xx}(z)|_{z=e^{i2\pi fT_s}} = \mathcal{S}_{xx}(e^{i2\pi fT_s})$$

dove  $T_s$  è il periodo di campionamento.

Poiché i sistemi fisici hanno memoria finita è ragionevole supporre che per fini pratici possiamo utilizzare filtri imbiancanti di memoria finita

$$\mathcal{A}(z) \cong \mathcal{A}_P(z) = \sum_{n=0}^P a[n] z^{-n}$$

# Parametrizzazione del rumore di VIRGO

Consideriamo il seguente problema:

- Supponiamo di conoscere, tramite misure sperimentali, lo spettro di potenza  $S(f)$  di un processo stocastico continuo  $x(t)$ .
- Supponiamo che  $x(t)$  sia un processo stazionario e gaussiano.
- È possibile determinare un processo discreto  $x[n]$ , con densità spettrale  $S(f)$  assegnata, che sia l'uscita di un filtro causale e stabile  $\mathcal{H}(z)$  con ingresso rumore bianco?

$$x[n] = \mathcal{H}(z) w[n]$$

- È possibile garantire che il filtro inverso  $1/\mathcal{H}(z)$  sia un filtro causale e stabile in modo da ottenere il processo inverso (whitening del segnale)?

$$w[n] = \frac{1}{\mathcal{H}(z)} x[n]$$

Un filtro stabile e causale  $\mathcal{H}(z)$  con filtro inverso  $1/\mathcal{H}(z)$  stabile e causale è chiamato *filtro a fase minima*. Cercheremo la soluzione al problema limitandoci alla classe dei filtri razionali a fase minima della forma:

$$\mathcal{H}(z) = \frac{b[0] + b[1]z^{-1} + \dots + b[Q]z^{-Q}}{1 + a[1]z^{-1} + \dots + a[P]z^{-P}}$$

# Processi Stocastici a Tempo Discreto

Consideriamo un processo stocastico reale e stazionario  $x(t)$  con media nulla e spettro a banda limitata:

$$S_c(f) = S_c(-f)$$

$$S_c(f) = 0 \quad |f| > \frac{f_s}{2}$$

La funzione di autocorrelazione è data da

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_{-f_s/2}^{f_s/2} S_c(f) e^{i2\pi ft} df \\ &= 2 \int_0^{f_s/2} S_c(f) \cos(2\pi ft) df \end{aligned}$$

Per evitare alias nello spettro, campioniamo il processo continuo  $x(t)$  con periodo di campionamento dato da

$$T_s = \frac{1}{f_s}$$

Otteniamo così la sequenza random  $x[n]$  ai tempi discreti  $t_n = nT_s$ , con  $-\infty < n < \infty$ , dove

$$x[n] = x(nT_s)$$

La relazione tra il processo continuo  $x(t)$  and la sequenza  $x[n]$  è data dalla formula d'interpolazione di Shannon

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin \pi f_s (t - nT_s)}{\pi f_s (t - nT_s)}$$

La funzione di autocorrelazione della sequenza  $x[n]$  è data da

$$r[n] = r(nT_s) = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} S_c(f) e^{i2\pi f T_s n} df$$

e la densità spettrale di potenza da

$$S(f) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n] e^{-i2\pi f T_s n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_c(f + k f_s)$$

Lo spettro di potenza della sequenza  $x[n]$  è periodico

$$S(f) = S(f + k f_s) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ed uguale allo spettro del processo continuo nell'intervallo di Nyquist

$$S(f) = S_c(f) \quad -\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$$

Lo spettro complesso della sequenza  $x[n]$  è dato da

$$\mathcal{S}(z) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n] z^{-n}$$

Se riusciamo a fattorizzare  $\mathcal{S}(z)$  nella forma

$$\mathcal{S}(z) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n] z^{-n} = T_s \mathcal{H}(z) \mathcal{H}(1/z)$$

allora la sequenza discreta  $x[n]$  può essere ottenuta filtrando rumore bianco

$$x[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m] w[n-m]$$

dove  $h[m]$  è la funzione di risposta impulsiva del filtro  $\mathcal{H}(z)$

$$h[m] = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} H(f) e^{i2\pi f T_s m} df$$

e  $w[n]$  è rumore bianco gaussiano a media nulla e varianza  $T_s$

$$E\{w[n]\} = 0$$

$$E\{w[n] w[n']\} = T_s \delta[n - n']$$

# Modello a Media Mobile

Chiaramente la parametrizzazione tramite filtro razionale del rumore sperimentale è utile se possiamo utilizzare un filtro con memoria limitata.

Come primo tentativo, cerchiamo di rappresentare il rumore sperimentale come una serie MA( $Q$ ) tramite un filtro FIR (filtro a risposta finita) di lunghezza  $Q + 1$  tale che

$$\mathcal{S}(z) \cong T_s \sum_{n=-Q}^Q r[n] z^{-n} = T_s \mathcal{H}_Q(z) \mathcal{H}_Q(1/z)$$

dove

$$\mathcal{H}_Q(z) = \sum_{n=0}^Q h[n] z^{-n}$$

In questo modo l'equazione dinamica del modello di rumore sperimentale è data da

$$x[n] = \mathcal{H}_Q(z) w[n] = \sum_{m=0}^Q h[m] w[n - m]$$

# Studio Modello: Rumore $1/f$ o Rumore Rosa

Il rumore  $1/f$ , o "rumore rosa", è caratterizzato da uno spettro che ad alte frequenze cade come  $1/f$ :

$$S(f) \propto \frac{1}{f}$$

Un'ipotesi sulla natura dinamica del rumore  $1/f$  è che esso rappresenti la somma di processi passabasso. Con questa ipotesi si ottiene automaticamente una regolarizzazione infrarossa e pertanto utilizzeremo la densità spettrale:

$$S(f) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \frac{1}{f^2 + \nu^2} d\nu = \frac{\phi(f)}{f}$$

dove

$$\phi(f) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \left( \tan^{-1} \frac{f}{f_{\min}} - \tan^{-1} \frac{f}{f_{\max}} \right)$$

La densità spettrale cade in frequenza come  $1/f$  per

$$f_{\min} \ll f \ll f_{\max}$$

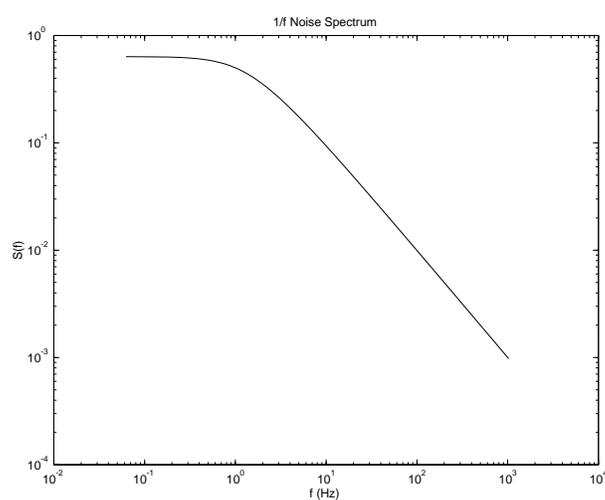
dove

$$\phi(f) \cong \sigma^2$$

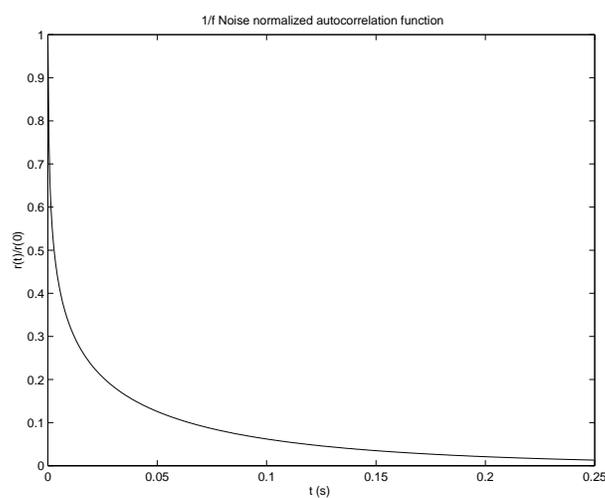
Come valori tipici delle frequenze limite, useremo

$$f_{\max} \cong 10 \text{ MHz}$$

$$f_{\min} \cong 1 \text{ Hz}$$



Spettro del Rumore  $1/f$



Funzione di Autocorrelazione del Rumore  $1/f$

# Fattorizzazione Spettrale

Supponiamo che il segnale d'ingresso sia rumore bianco a media nulla e varianza unitaria e che la potenza spettrale e la funzione di autocorrelazione del processo di uscita siano dati da

$$S(f) = S(-f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n] e^{-i2\pi fn}$$

$$r[n] = r[-n] = \int_{-1/2}^{1/2} S(f) e^{i2\pi fn} df$$

Lo spettro complesso è

$$\mathcal{S}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n] z^{-n}$$

dove

$$r[n] = r[-n] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}(z) = \mathcal{S}(1/z)$$

Assegnata  $\mathcal{S}(z)$ , è possibile determinare una funzione di trasferimento  $\mathcal{H}(z)$  in modo tale che l'equazione

$$\mathcal{S}(z) = \mathcal{H}(z) \mathcal{H}(1/z)$$

sia soddisfatta?

Il problema della fattorizzazione di  $\mathcal{S}(z)$  non ha una soluzione unica. Infatti se  $\mathcal{H}(z)$  è una soluzione, allora anche

$$\mathcal{H}'(z) = \pm z^{-k} \mathcal{H}(z)$$

$$\mathcal{H}''(z) = \mathcal{H}(1/z)$$

sono soluzioni del problema di fattorizzazione.

Si può dimostrare che (a parte un'ambiguità di segno) esiste una fattorizzazione spettrale in cui il filtro  $\mathcal{H}(z)$  ed il filtro inverso  $1/\mathcal{H}(z)$  sono causali purché lo spettro di potenza  $S(f)$  soddisfi alla condizione di Paley e Wiener:

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\ln S(f)| df < \infty$$

Per spettri fisici la condizione di Paley e Wiener equivale a richiedere l'assenza di linee spettrali (funzioni delta) nello spettro del segnale.

La fattorizzazione spettrale può essere ottenuta nel modo seguente.

Partiamo da

$$\mathcal{S}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n] z^{-n}$$

e definiamo lo *cepstrum* complesso

$$\hat{\mathcal{S}}(z) = \ln(\mathcal{S}(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{r}[n] z^{-n}$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{r}[n] &= \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\mathcal{S}}(f) e^{i2\pi f n} df \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\mathcal{S}}(-f) e^{i2\pi f n} df = \hat{r}[-n] \end{aligned}$$

Definiamo ora la parte causale di  $\hat{\mathcal{S}}(z)$  tramite l'espressione

$$\hat{\mathcal{S}}_+(z) = \frac{1}{2} \hat{r}[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{r}[n] z^{-n}$$

e scriviamo

$$\hat{\mathcal{S}}(z) = \hat{\mathcal{S}}_+(z) + \hat{\mathcal{S}}_+(1/z)$$

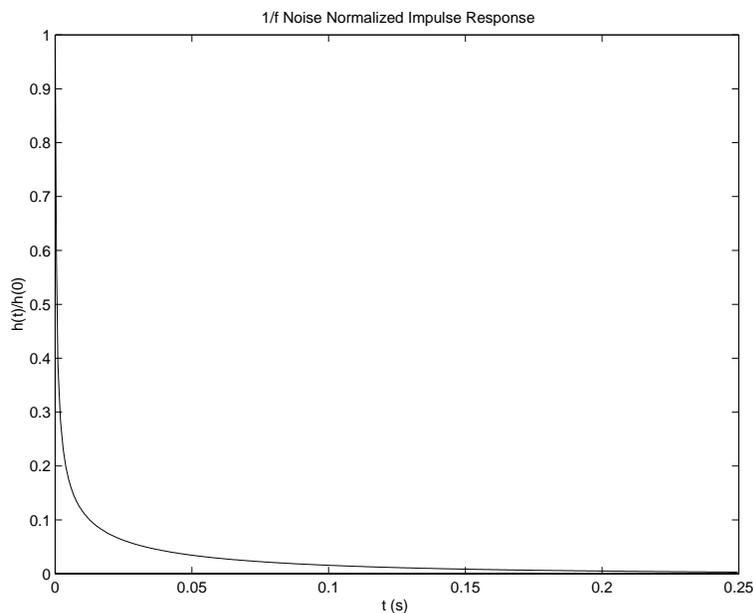
A questo punto la fattorizzazione canonica di  $\mathcal{S}(z)$  è data da

$$\mathcal{H}(z) = \exp \hat{\mathcal{S}}_+(z)$$

dove  $\mathcal{H}(z)$  ha zeri e poli all'interno del cerchio unitario nel piano  $z$ . Il filtro  $\mathcal{H}(z)$  è quindi stabile e causale con risposta impulsiva data da

$$h[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{i2\pi f n} df$$

Ad esempio, la risposta impulsiva associata al rumore rosa è data da



Risposta impulsiva del filtro  $1/f$

La figura precedente mostra che il filtro associato al rumore rosa, in accordo all'intuizione fisica, ha una memoria finita e quindi è ragionevole cercare un filtro canonico, con memoria limitata, definito da:

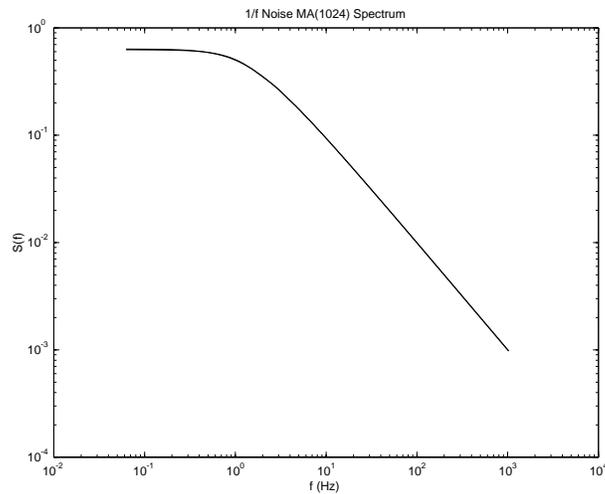
$$\mathcal{H}_Q(z) = \sum_{n=0}^Q h[n] z^{-n}$$

che sia soluzione del problema di fattorizzazione spettrale

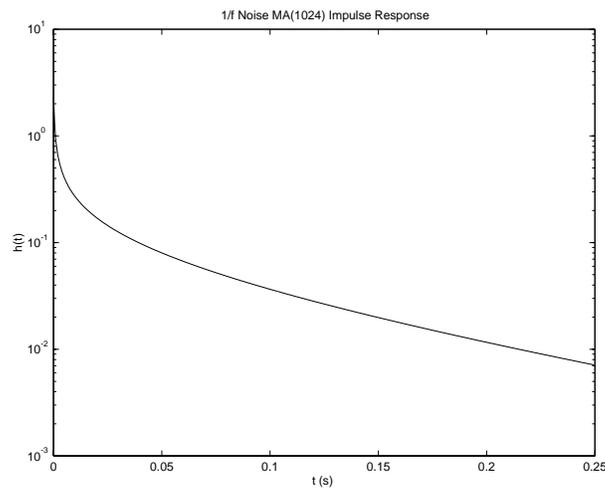
$$\mathcal{S}_Q(z) = \sum_{n=-Q}^Q r[n] z^{-n} = \mathcal{H}_Q(z) \mathcal{H}_Q(1/z)$$

# Modello MA(1024)

Ad esempio, proviamo se un modello a media mobile con  $Q = 1024$  è una parametrizzazione ragionevole del rumore rosa



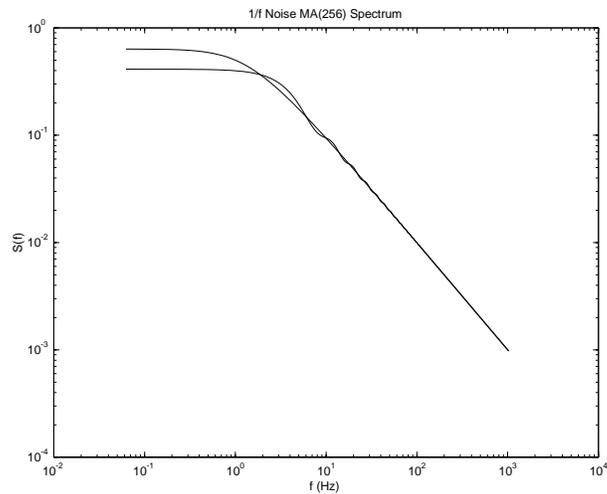
Rumore  $1/f$  e Modello MA(1024)



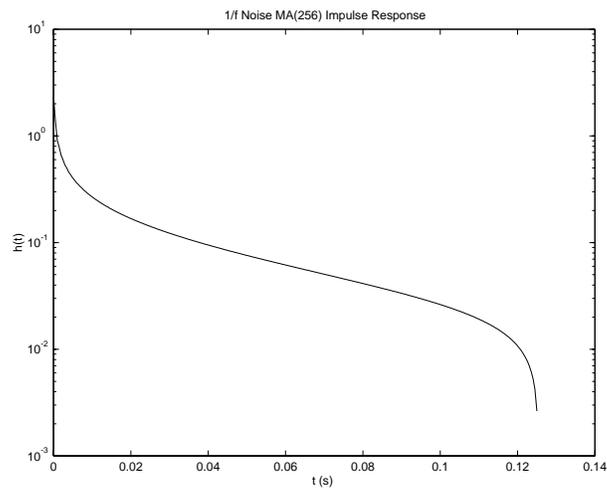
Funzione impulsiva del modello MA(1024)

# Modello MA(256)

Per motivi pratici, vediamo ora se un numero minore di coefficienti della media mobile è sufficiente. Proviamo  $Q = 256$



Rumore  $1/f$  e Modello MA(256)



Funzione impulsiva del modello MA(256)

# Modelli Autoregressivi

Una modello spettrale razionale molto usato è il modello autoregressivo di ordine  $P$  o modello  $\text{AR}(P)$ :

$$\mathcal{S}_P(z) = \frac{\sigma_P^2}{\mathcal{A}_P(z) \mathcal{A}_P(1/z)}$$

dove

$$\mathcal{A}_P(z) = 1 + a_P[1] z^{-1} + \dots + a_P[P] z^{-P}$$

La relazione tra i modelli  $\text{AR}$  e i modelli  $\text{MA}$  è data da

$$\frac{\sigma_P}{\mathcal{A}_P(z)} \cong \sigma_P (1 - a_P[1] z^{-1} + \dots) = b[0] + b[1] z^{-1} + \dots$$

L'equazione dinamica di una sequenza  $\text{AR}(P)$  è

$$x[n] + a_P[1] x[n-1] + \dots + a_P[P] x[n-P] = \sigma_P w[n]$$

simile in forma all'equazione dinamica di Langevin, Fokker e Planck usata per descrivere sistemi stocastici con tempo continuo:

$$\left[ \frac{d^P}{dt^P} + \alpha_P[1] \frac{d^{P-1}}{dt^{P-1}} + \dots + \alpha_P[P] \right] x(t) = \rho_P \xi(t)$$

dove  $\xi(t)$  rappresenta rumore bianco per tempo continuo:

$$E\{\xi(t)\} = 0 \quad E\{\xi(t) \xi(t')\} = \delta(t - t')$$

Note le correlazioni della sequenza  $x[n]$ , si può facilmente dimostrare che i coefficienti AR,  $\{a_P [1], \dots, a_P [P]\}$ , sono soluzioni delle equazioni di Yule e Walker:

$$R_{P+1} \begin{bmatrix} 1 \\ a_P [1] \\ \vdots \\ a_P [P] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_P^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove

$$R_{P+1} = \begin{bmatrix} r [0] & r [1] & \dots & r [P] \\ r [1] & r [0] & \dots & r [P - 1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r [P] & r [P - 1] & \dots & r [0] \end{bmatrix}$$

e

$$r [k] = E \{x [n] x [n - k]\}$$

Le soluzioni delle equazioni di Yule e Walker sono

$$\begin{bmatrix} a_P [1] \\ \vdots \\ a_P [P] \end{bmatrix} = -R_P^{-1} \begin{bmatrix} r [1] \\ \vdots \\ r [P] \end{bmatrix}$$

e

$$\sigma_P^2 = r [0] + \sum_{k=1}^P a_p [k] r [k]$$

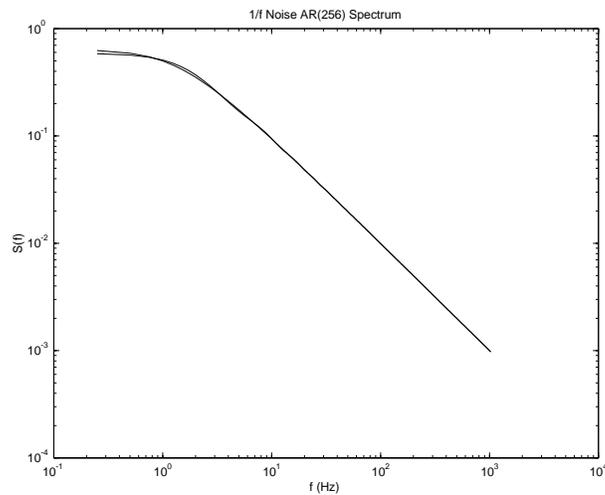
# Utilità dei Modelli Autoregressivi

- I modelli AR sono largamente usati nell'analisi dei segnali stocastici in quanto i parametri AR  $\{a_P[1], \dots, a_P[P]\}$  possono essere determinati risolvendo un sistema lineare di equazioni.
- Se la matrice di correlazione  $R_P$  è definita positiva, o  $S(f) > 0$ , allora la soluzione delle equazioni di Yule e Walker danno luogo ad un filtro  $\mathcal{A}(z)$  a fase minima.
- Data la struttura di Toeplitz della matrice di correlazione  $R_P$ , le equazioni di Yule e Walker possono essere risolte numericamente con solo  $O(P^2)$  flops e  $O(P)$  locazioni di memoria usando l'algoritmo veloce di Levinson e Durbin.
- La parametrizzazione di uno spettro positivo  $S(f)$  tramite un modello MA può essere considerata come la parametrizzazione AR di uno spettro di potenza  $1/S(f)$ . Quindi i coefficienti MA possono essere determinati risolvendo un modello AR.
- Nella pratica, a parità di spettro  $S(f)$ , il numero di coefficienti AR è di solito molto minore del numero dei coefficienti MA.

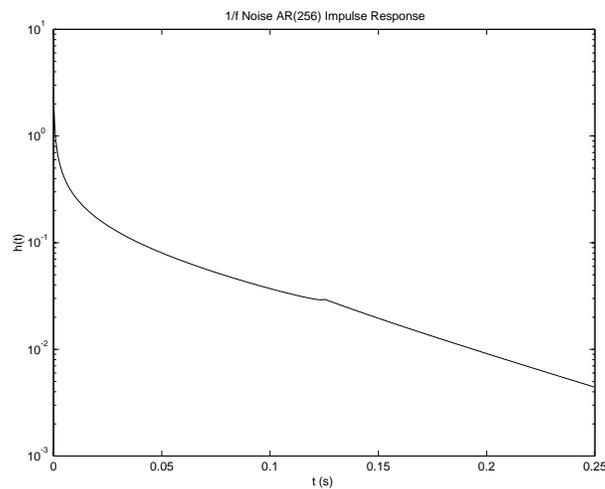
# AR(256) Model

Torniamo al rumore rosa.

Ad esempio, consideriamo un modello AR con  $P = 256$



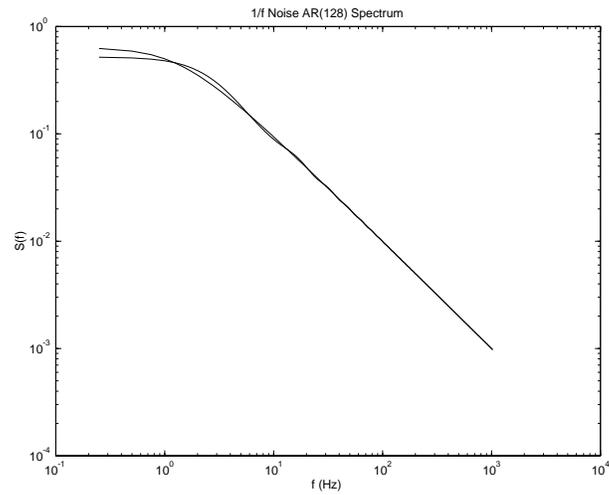
Spettro  $1/f$  e spettro AR(256)



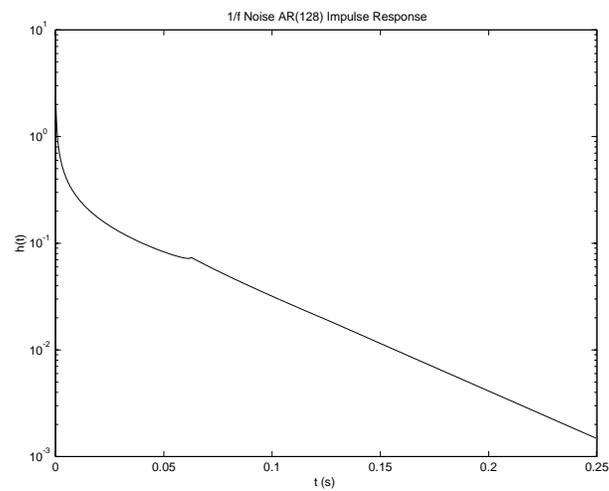
Funzione impulso del modello AR(256)

# Modello AR(128)

Proviamo ora un modello AR(128)



Spettro  $1/f$  e spettro AR(128)



Funzione impulso del modello AR(128)

# Modelli Autoregressivi a Media Mobile

Nella modellizzazione di uno spettro si nota che un modello a media mobile MA è molto utile per rappresentare le valli dello spettro, mentre un modello autoregressivo AR è molto utile per rappresentare i picchi dello spettro. Per sfruttare le caratteristiche delle parametrizzazioni AR e MA una terza parametrizzazione razionale dello spettro è offerta dai modelli ARMA( $P, Q$ ):

$$S(z) = \frac{\mathcal{B}_Q(z) \mathcal{B}_Q(1/z)}{\mathcal{A}_P(z) \mathcal{A}_P(1/z)}$$

dove

$$\mathcal{A}_P(z) = 1 + a_P[1]z^{-1} + \dots + a_P[P]z^{-P}$$

$$\mathcal{B}_Q(z) = b[0] + b_Q[1]z^{-1} + \dots + b_Q[Q]z^{-Q}$$

La sequenza temporale  $\{x[n]\}$  è generata dall'equazione dinamica

$$x[n] = - \sum_{p=1}^P a_P[p] x[n-p] + \sum_{q=0}^Q b_Q[q] w[n-q]$$

con opportune condizioni iniziali, o in notazione sintetica dal filtro

$$x[n] = \mathcal{H}(z) w[n]$$

dove  $\mathcal{H}(z)$  è il filtro IIR dato da

$$\mathcal{H}(z) = \frac{b[0] + b_Q[1]z^{-1} + \dots + b_Q[Q]z^{-Q}}{1 + a_P[1]z^{-1} + \dots + a_P[P]z^{-P}}$$

I coefficienti ARMA( $P, Q$ ) si possono calcolare in termini dei primi  $P + Q + 1$  valori della funzione di autocorrelazione  $\{r[0], r[1], \dots, r[P + Q]\}$ .

I coefficienti AR  $\{a_P[1], \dots, a_P[P]\}$  sono le soluzioni delle equazioni modificate di Yule e Walker

$$\begin{bmatrix} r[Q] & r[Q-1] & \dots & r[Q+1-P] \\ r[Q+1] & r[Q] & \dots & r[Q+2-P] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r[Q+P-1] & r[Q+P-2] & \dots & r[Q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_P[1] \\ \vdots \\ a_P[P] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r[Q+1] \\ r[Q+2] \\ \vdots \\ r[Q+P] \end{bmatrix}$$

I coefficienti MA  $\{b_Q[0], \dots, b_Q[Q]\}$  possono essere calcolati usando le tecniche di fattorizzazione spettrale.

Poiché

$$x[n] = \frac{\mathcal{B}_Q(z)}{\mathcal{A}_P(z)} w[n]$$

consideriamo il processo

$$y[n] = \frac{1}{\mathcal{A}_P(z)} w[n]$$

Introdotta il processo  $y[n]$ , il processo  $x[n]$  diventa un sistema MA tale che

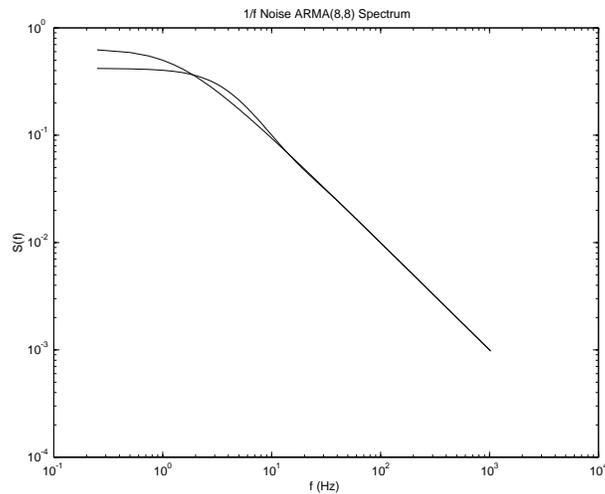
$$x[n] = \mathcal{B}_Q(z) y[n]$$

e per ottenere  $\mathcal{B}_Q$  possiamo risolvere il problema di fattorizzazione spettrale

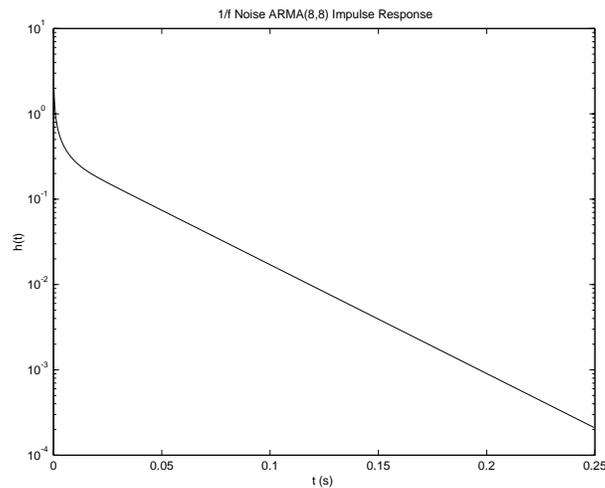
$$\mathcal{B}_Q(z) \mathcal{B}_Q(1/z) = \mathcal{A}_P(z) \mathcal{A}_P(1/z) \mathcal{S}(z) = \mathcal{S}'(z)$$

# Modello ARMA(8, 8)

Come esempio, parametrizziamo il rumore rosa con un modello ARMA con  $P = 8$  e  $Q = 8$



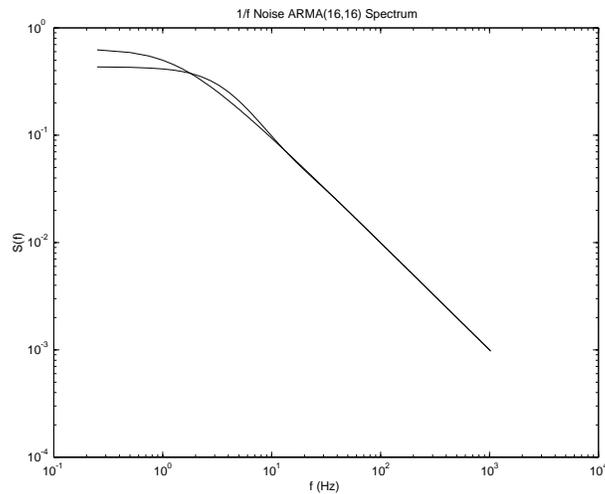
Rumore  $1/f$  e Modello ARMA(8, 8)



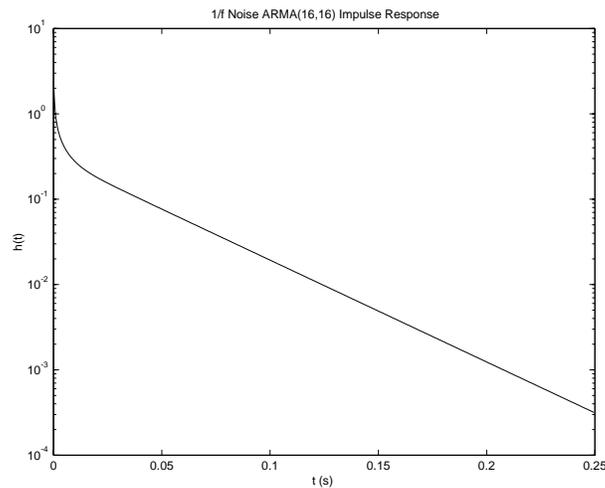
Risposta impulsiva del Modello ARMA(8, 8)

# Modello ARMA(16, 16)

Come esempio, parametrizziamo il rumore rosa con un modello ARMA con  $P = 16$  e  $Q = 16$



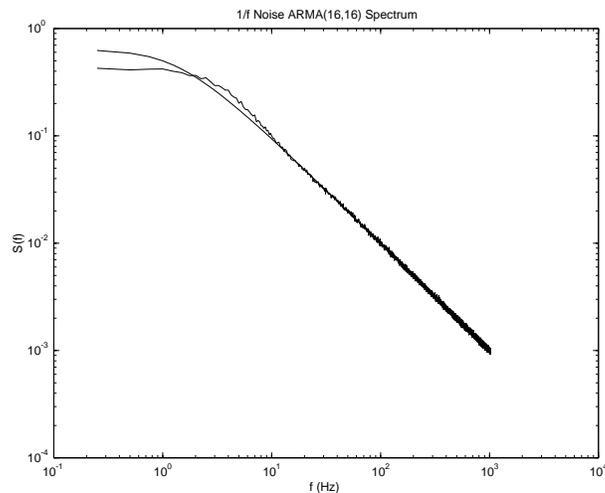
Rumore  $1/f$  e Modello ARMA(16, 16)



Risposta impulsiva del Modello ARMA(16, 16)

# Simulazione del rumore $1/f$

Il modello ARMA(16, 16) del rumore  $1/f$  offre una funzione di sistema compatta utile per generare sequenze artificiali nelle simulazioni numeriche



Spettro ARMA(16, 16) simulato (1000 realizzazioni)

# Modi di Violino

Nell'apparato sperimentale di VIRGO una importante fonte di rumore è data dal rumore termico dei pendoli. Lo spettro del rumore termico presenta forti picchi dovuti ai modi di violino dei pendoli. Lo spettro di rumore stimato è della forma

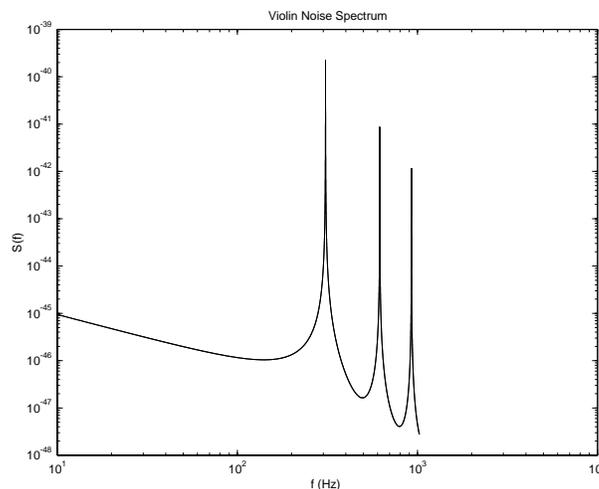
$$S(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f/f_0} \frac{\alpha}{(f^2/f_0^2 - n^2)^2 + n^4\phi^2}$$

dove (ad esempio modi di violino dello specchio lontano)

$$\alpha = 2.82 \times 10^{-47}$$

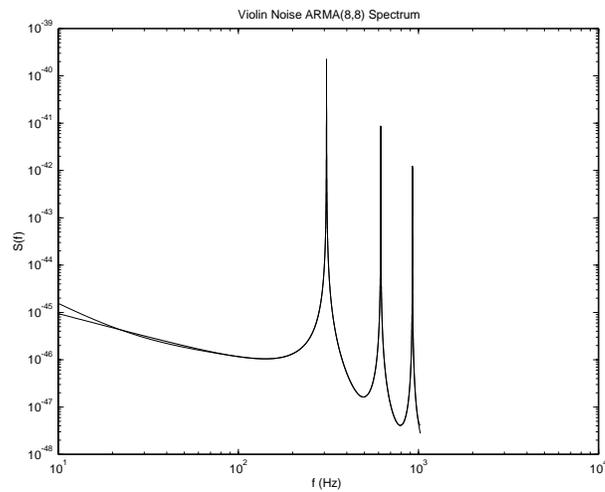
$$f_0 = 308.6\text{Hz}$$

$$\phi^2 = 10^{-7}$$

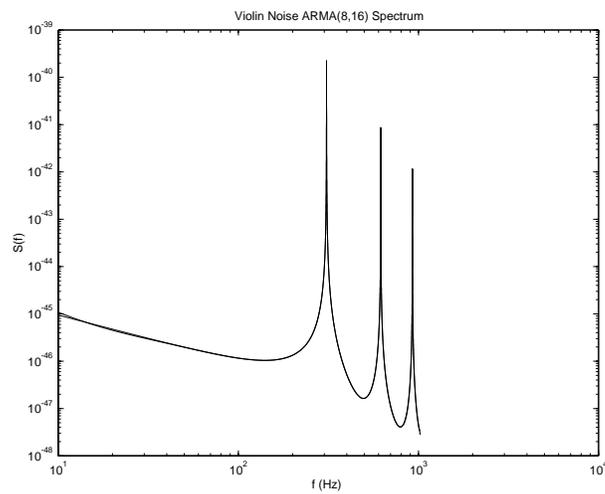


Spettro del Rumore termico

# Modelli ARMA del rumore termico



Rumore termico e spettro ARMA(8, 8)



Rumore termico e spettro ARMA(8, 16)

# Rivelazione Non Parametrica di Segnali Deterministici in Rumore Bianco

Supponiamo di conoscere come imbiancare il rumore di VIRGO e come controllare con un sistema adattivo di identificazione effetti spettrali con debole dipendenza temporale.

Consideriamo il problema della rivelazione non parametrica del segnale gravitazionale.

Assegnata la sequenza

$$x[n] = u[n] + v[n]$$

dove  $u[n]$  è un segnale utile e  $v[n]$  il rumore imbiancato dell'interferometro, vogliamo rivelare il segnale utile facendo il minimo numero di ipotesi sulla forma di  $u[n]$ .

Come è noto, se la forma di  $u[n]$  è perfettamente conosciuta allora il problema della rivelazione è risolto in modo ottimo dal filtro adattato alla forma di  $u[n]$ .

Purtroppo la conoscenza teorica dei possibili segnali delle onde gravitazionali è incompleta. Ad esempio nel caso delle coalescenze conosciamo abbastanza bene la forma d'onda nella fase non relativistica (calcoli perturbativi in approssimazione post-Newtoniana) mentre non è conosciuta la forma d'onda nella fase di merging. (Questa fase non è trattabile perturbativamente e l'unico metodo di calcolo conosciuto è rappresentato da calcoli numerici estremamente complessi).

Come problema generale, iniziamo con l'esplorare quali siano le differenze tra un segnale fisico deterministico a banda limitata ed il rumore bianco.

Una differenza ovvia tra un segnale a banda limitata ed il rumore bianco è il comportamento differente della funzione di correlazione

Consideriamo la matrice di correlazione di una sequenza di rumore bianco:

$$R_{vv}[n, m] = E\{v[n]v[m]\} = \sigma^2\delta[n - m]$$

Osserviamo che i termini fuori diagonale sono nulli.

Viceversa, un segnale deterministico con una stretta banda in frequenza è fortemente correlato con contributi fuori diagonale:

$$\begin{aligned} R_{xx}[n, m] &= E\{x[n]x[m]\} \\ &= E\{u[n]u[m]\} + \sigma^2\delta[n - m] \end{aligned}$$

Ad esempio, un segnale sinusoidale monocromatico

$$u[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

induce una matrice di correlazione data da

$$R_{uu}[n, m] = r_{uu}[n - m] = \frac{A^2}{2} \cos[\omega_0(n - m)]$$

Nel caso di segnale sinusoidale in rumore bianco abbiamo

$$R_{xx}[n, m] = \frac{A^2}{2} \cos[\omega_0(n - m)] + \sigma^2 \delta[n - m]$$

dove  $0 \leq n, m < N$ . Gli  $N$  autovalori della matrice di correlazione  $N \times N$  sono dati da

$$\text{autovalori} = \left\{ \lambda_+, \lambda_-, \underbrace{\sigma^2, \dots, \sigma^2}_{N-2} \right\}$$

dove

$$\lambda_{\pm} = \frac{A^2}{2} \gamma_{\pm}^2 + \sigma^2$$
$$\gamma_{\pm}^2 = \frac{N}{2} \left[ 1 \pm \frac{\sin(\omega_0 N)}{N \sin \omega_0} \right]$$

Gli autovettori principali, con autovalori  $\lambda_{\pm}$ , sono dati da

$$\psi_+[n] = \frac{1}{\gamma_+} \cos \left[ \omega_0 \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$$
$$\psi_-[n] = \frac{1}{\gamma_-} \sin \left[ \omega_0 \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \right]$$

con le proprietà

$$\sum_{n=0}^{N-1} \psi_+^2 [n] = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_-^2 [n] = 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \psi_+ [n] \psi_- [n] = 0$$

$$\psi_{\pm} [N - 1 - n] = \pm \psi_{\pm} [n]$$

Osserviamo che gli autovettori principali hanno la stessa forma d'onda del segnale deterministico ed il loro numero, il rango di  $R_{uu}$ , è uguale alla "dimensione" del segnale

$$u [n] = A \cos (\omega_0 n + \phi) = \alpha_+ \psi_+ [n] + \alpha_- \psi_- [n]$$

Quindi lo spazio vettoriale di dimensione  $N$  del segnale osservato è diviso in due spazi ortogonali

$$V_{SN} = \text{span di } \psi_+ \text{ and } \psi_-$$

$$V_N = \text{span di } \psi_k \text{ for } k = 1, \dots, N - 2$$

e

$$u \in V_{SN}$$

$$u \notin V_N$$

# Autofiltro Principale

Un'importante applicazione delle proprietà precedenti è data dalla costruzione di un filtro basato sull'autovettore principale.

Consideriamo il filtro FIR

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \psi_+[m] x[n-m] = y_u[n] + y_v[n]$$

dove

$$\begin{aligned} y_u[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} \psi_+[m] u[n-m] \\ &= \frac{AN}{2\gamma_+} \left\{ \cos \left[ \omega_0 \left( n - \frac{N-1}{2} \right) + \phi \right] + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\} \end{aligned}$$

L'autofiltro principale agisce in modo simile ad un filtro adattato in quanto produce un miglioramento del rapporto segnale-rumore (SNR):

$$\frac{E\{y_u^2[n]\}}{E\{y_v^2[n]\}} = \frac{A^2 N^2}{8\gamma_+^2} \frac{1}{\sigma^2} \cong \frac{A^2 N}{4\sigma^2}$$

Il filtro basato sull'autovettore principale può essere calcolato direttamente dalla sequenza dei dati osservati con un algoritmo on-line basato su una rete neurale (rete neurale di Oja) senza conoscere preventivamente la frequenza del segnale.

# Filtro Notch e Filtro Peaking

Un altro potente metodo di rivelazione on-line di segnali sinusoidali di frequenza incognita immersi in rumore bianco è basato sulla seguente identità:

Se

$$u[n] = \cos(2\pi f_0 n + \phi_0)$$

allora

$$u[n] - 2 \cos(2\pi f_0) u[n-1] + u[n-2] = 0$$

Usando la relazione precedente possiamo costruire due tipi di filtri:

- un filtro “notch” utile per cancellare una sinusoide di frequenza  $f_0$
- un filtro “peaking” utile per esaltare una sinusoide di frequenza  $f_0$

Il filtro notch è della forma

$$H_N(z) = \frac{1 + r^2}{2} \frac{1 - 2 \cos(2\pi f_0) z^{-1} + z^{-2}}{1 - (1 + r^2) \cos(2\pi f_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Questo tipo di filtro ha uno zero per  $f = f_0$  e ampiezza vicina ad uno per  $f \neq f_0$ . Il parametro  $r$ , il raggio del notch, è

collegato all'ampiezza della banda in frequenza eliminata dal filtro. Se  $B$  denota la banda di attenuazione a  $-3$  dB della risposta in ampiezza del filtro notch, allora

$$r^2 = \frac{1 - \tan(B/2)}{1 + \tan(B/2)}$$

e

$$r \cong 1 - B/2$$

Osserviamo che  $r$  è indipendente dalla frequenza notch  $f_0$ .

Viceversa, per esaltare un segnale sinusoidale di frequenza  $f_0$ , possiamo usare come filtro peaking il filtro passabanda complementare al filtro notch discusso precedentemente.

Consideriamo la coppia di filtri

$$\mathcal{H}_N(z) = \frac{1 + r^2}{2} \frac{1 - 2 \cos(2\pi f_0) z^{-1} + z^{-2}}{1 - (1 + r^2) \cos(2\pi f_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$\mathcal{H}_{BP}(z) = \frac{1 - r^2}{2} \frac{1 - z^{-2}}{1 - (1 + r^2) \cos(2\pi f_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

con le proprietà

$$\mathcal{H}_N(z) + \mathcal{H}_{BP}(z) = 1 \quad \text{per ogni } z$$

$$|\mathcal{H}_N(f)|^2 + |\mathcal{H}_{BP}(f)|^2 = 1 \quad \text{per ogni } f$$

Poiché

$$H_{BP}(f_0) = 1$$

ogni sinusoidale di frequenza  $f_0$  passa il filtro senza distorsioni né di ampiezza né di fase.

Se l'ingresso ad un filtro peaking è rumore bianco:

$$w[n] = H_{BP}(z) v[n]$$

allora il rapporto di riduzione del rumore (NRR) è dato da

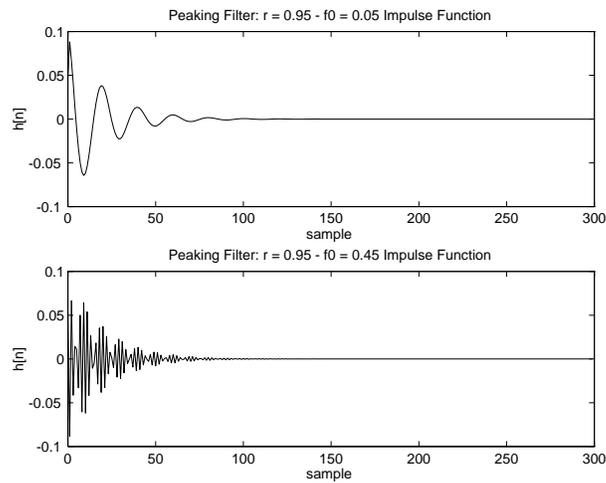
$$\text{NRR}(r, f_0) = \frac{E\{w^2[n]\}}{E\{v^2[n]\}}$$

dove

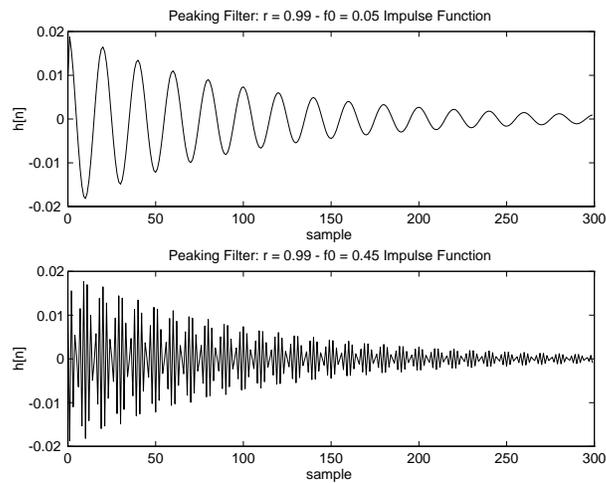
$$\text{NRR}(0.95, 0.05 < f_0 < 0.45) \approx \frac{1}{20}$$

$$\text{NRR}(0.99, 0.05 < f_0 < 0.45) \approx \frac{1}{100}$$

Il prezzo da pagare per ottenere un migliore NRR è una costante di tempo del filtro peaking più lunga. Come ordine di grandezza la costante di tempo alla frequenza di campionamento  $f_s = 4096 \text{ Hz}$  è dell'ordine di  $0.02 \text{ s}$ .



Filtro Peaking,  $r = 0.95$ , Funzione Impulsiva



Filtro Peaking,  $r = 0.99$ , Funzione Impulsiva

Partendo da una frequenza qualsiasi, è possibile usare algoritmi on-line per calibrare filtri peaking, con raggio  $r$  fisso, alla frequenza  $f_0$  di una sinusoide presente nel segnale osservato. Il tempo di adattamento dipende naturalmente dal rapporto segnale-rumore.

# Rivelazione Non Parametrica di Segnali con Frequenza Dipendente dal Tempo

Molti segnali fisici, ad esempio i segnali di onde gravitazionali emessi da pulsar (modulazione doppler) o emessi in seguito a coalescenze, hanno frequenza dipendente dal tempo. Assumeremo che il segnale da rivelare  $u(t)$  sia un segnale di tipo "chirp", ovvero un segnale della forma:

$$u(t) = A(t) \cos \phi(t)$$

dove le variazioni relative di  $A(t)$  sono piccole rispetto alle oscillazioni sinusoidali e la frequenza locale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t)$$

è lentamente variabile. In altre parole, un segnale chirp è una senoide caratterizzata da un'ampiezza locale ed una frequenza locale.

Per segnali chirp, si può scrivere una relazione interessante.

Se

$$u(t) = A(t) \cos \phi(t)$$

allora

$$u(t + \Delta) - k(t) u(t) + u(t - \Delta) = O(\Delta^2)$$

dove

$$k(t) = 2 \cos(\dot{\phi}(t) \Delta)$$

Osserviamo che la relazione precedente non dipende, all'ordine  $\Delta$ , dall'ampiezza del segnale.

È facile generalizzare la relazione precedente ad ordini arbitrari nell'espansione in potenze del tempo di campionamento  $\Delta$ . Ad esempio

$$u(t + 2\Delta) - 4u(t + \Delta) - \tilde{k}(t)u(t) - 4u(t - \Delta) + u(t - 2\Delta) = O(\Delta^4)$$

dove

$$\tilde{k}(t) = k^2(t) - 4k(t) - 2$$

Le relazioni precedenti sono numericamente corrette per intervalli temporali  $\Delta$  tali che

$$\Delta \ll \frac{1}{\sqrt{\dot{f}(t)}}$$

Osserviamo che  $(\dot{f}(t))^{-1/2}$  è dell'ordine di grandezza della durata della frequenza locale  $f(t)$ .

# Rivelazione di Segnali di Coalescenza nella fase Ringdown

Come esempio di uso di un filtro peaking adattivo, consideriamo il segnale che segue la fase di collasso di un sistema binario di buchi neri. Il segnale ringdown è della forma:

$$u(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Questo tipo di segnale soddisfa alla relazione esatta:

$$u(t) - 2 \cos(\omega_0 \Delta) e^{-\Delta/\tau} u(t - \Delta) + e^{-2\Delta/\tau} u(t - 2\Delta) = 0$$

e partendo dalla relazione precedente possiamo facilmente costruire un filtro peaking ottimizzato per questo tipo di segnale.

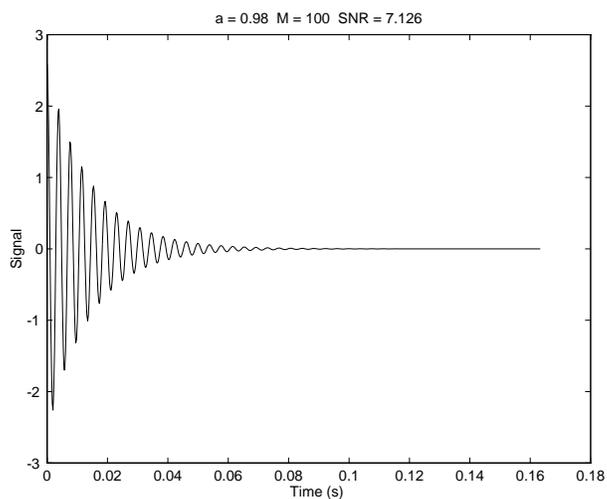
Tuttavia, osserviamo che per piccoli periodi di campionamento,  $\Delta \ll \tau$ , abbiamo

$$e^{-\Delta/\tau} \cong 1 - \Delta/\tau$$

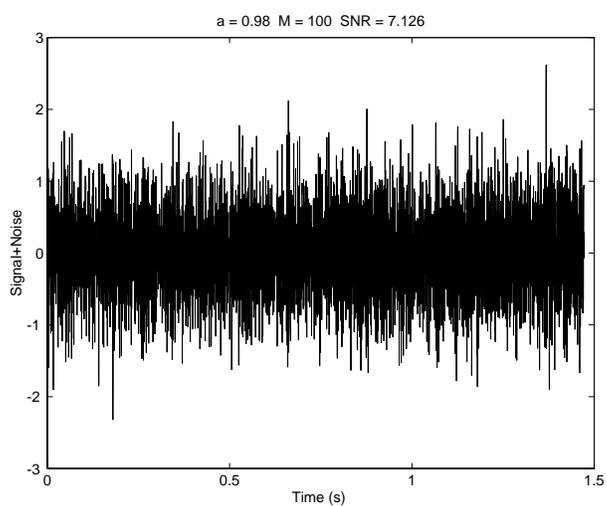
e in questo caso vale la relazione tipica dei segnali chirp

$$u(t) - 2 \cos(\omega_0 \Delta) u(t - \Delta) + u(t - 2\Delta) = O(\Delta^2)$$

# Rivelazione di Segnali Ringdown



Esempio di segnale ringdown



Esempio di segnale ringdown immerso in rumore

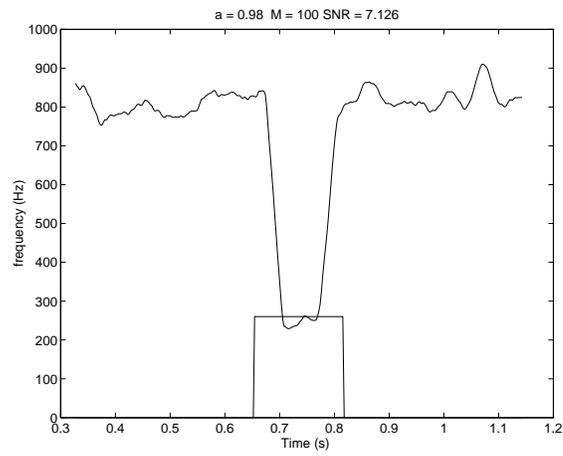
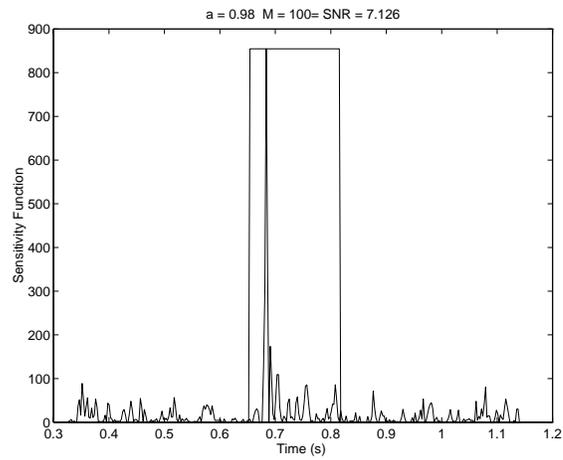


Grafico Tempo-Frequenza rivelato dal filtro peaking adattivo



Funzione di Sensività del filtro peaking adattivo

# Rivelazione Non Parametrica di Forme d'Onda di Sistemi Binari Coalescenti

Per verificare la validità dello schema di rivelazione di segnali chirp, consideriamo un modello semplice di forma d'onda che rappresenta il segnale emesso da un sistema binario coalescente nella prima fase (inspiral phase):

$$h(t) \propto \theta(\tau - t) \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-1/4} \cos \phi(t)$$

dove

$$\phi(t) = 2\pi \int_0^t f(t') dt' + \phi_0 \quad f(t) = f_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-3/8}$$

$$\tau = \frac{3}{K} \left(\frac{f_0}{100\text{Hz}}\right)^{-8/3} \text{ s} \quad K = \frac{\mu M^{2/3}}{M_\odot^{5/3}}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad M = m_1 + m_2$$

Considereremo tre esempi:

$$m_1 = m_2 = 1.41 M_\odot \quad R = 1 \text{ Mpc e } 5 \text{ Mpc}$$

e

$$m_1 = m_2 = 10 M_\odot \quad R = 34 \text{ Mpc}$$

# Forme d'Onda

Dopo l'operazione di whitening il segnale osservato è dato da

$$x[n] = \mathcal{W}(z) u[n] + v[n]$$

$$E\{v[n] v[n']\} = \delta[n - n']$$

Per un segnale utile di lunghezza  $N$  definiamo il rapporto segnale rumore (SNR) rispetto a rumore bianco a media nulla e varianza unitaria come

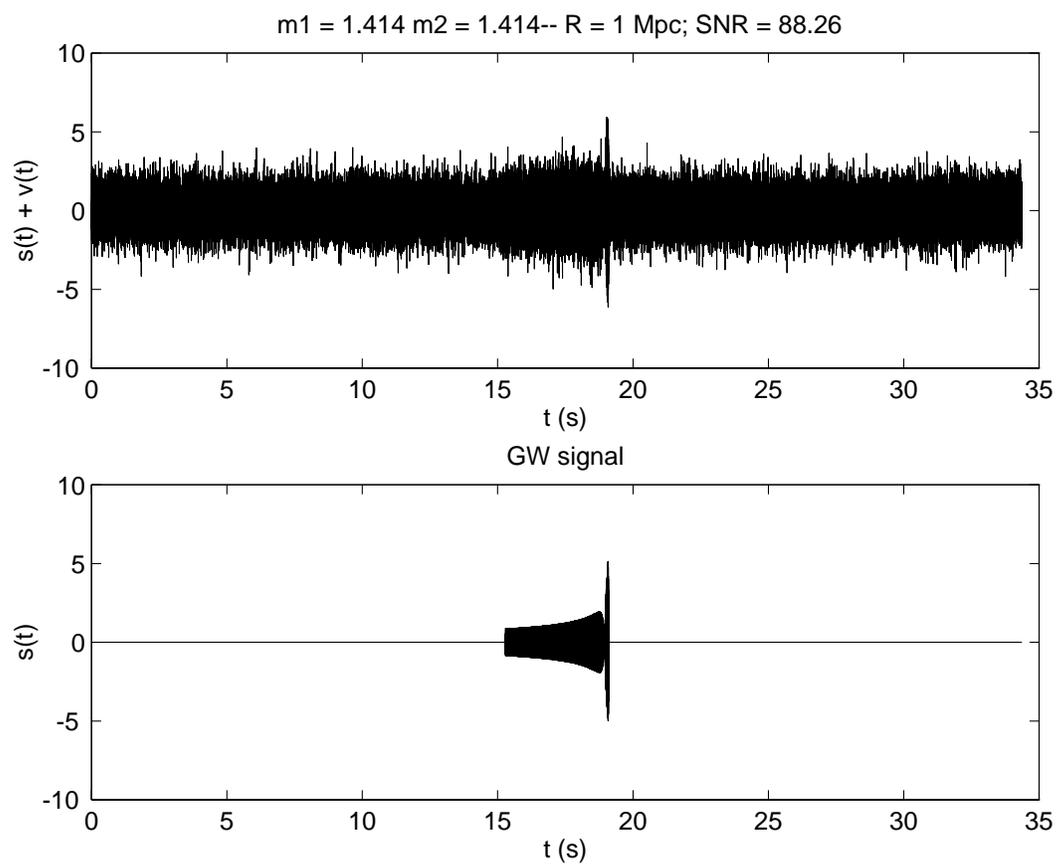
$$\text{SNR} = \sum_{n=0}^{N-1} s^2[n] = s^T s$$

dove

$$s[n] = \mathcal{W}(z) u[n]$$

# Forme d'Onda, cont.

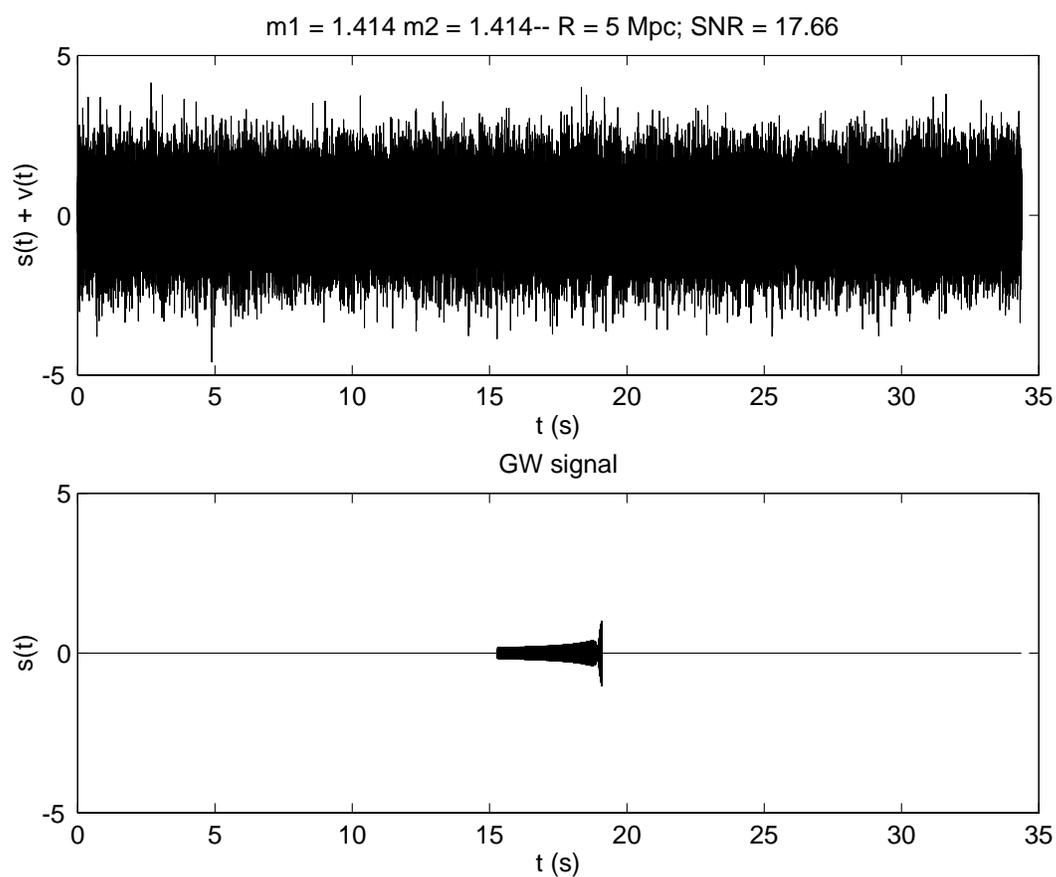
$$m_1 = m_2 = 1.41 M_{\odot} \quad R = 1 \text{ Mpc}$$



Esempio di Forma d'onda di un segnale di Coalescenza

# Forme d'Onda, cont.

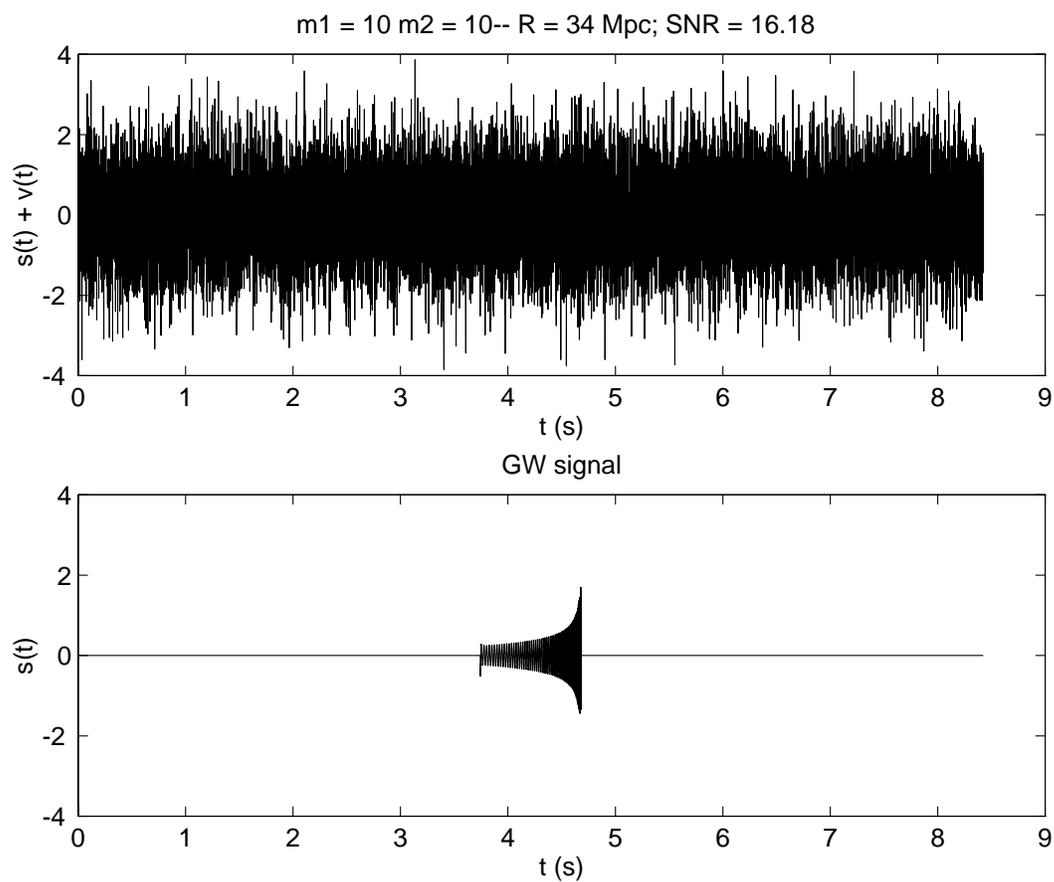
$$m_1 = m_2 = 1.41 M_{\odot} \quad R = 5 \text{ Mpc}$$



Esempio di Forma d'onda di un segnale di Coalescenza

# Forme d'Onda, cont.

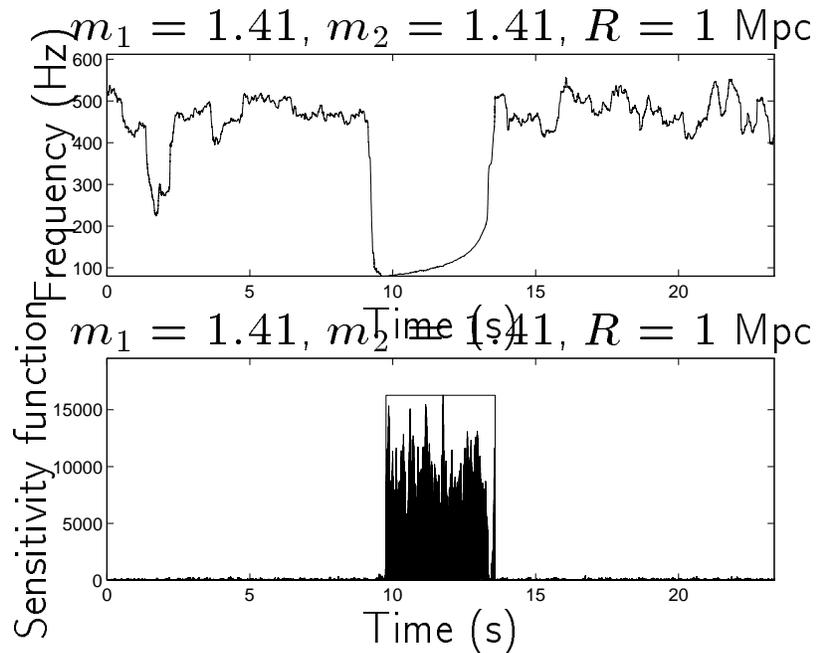
$$m_1 = m_2 = 10 M_{\odot} \quad R = 34 \text{ Mpc}$$



Esempio di Forma d'onda di un segnale di Coalescenza

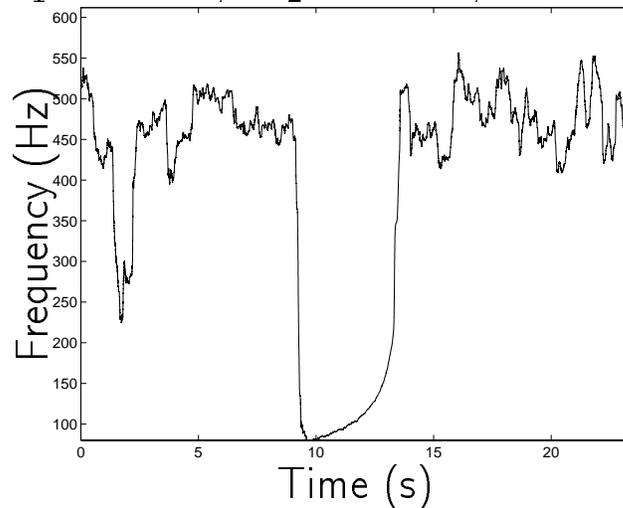
Primo Esempio:

$$m_1 = m_2 = 1.41 M_\odot \quad R = 1 \text{ Mpc}$$



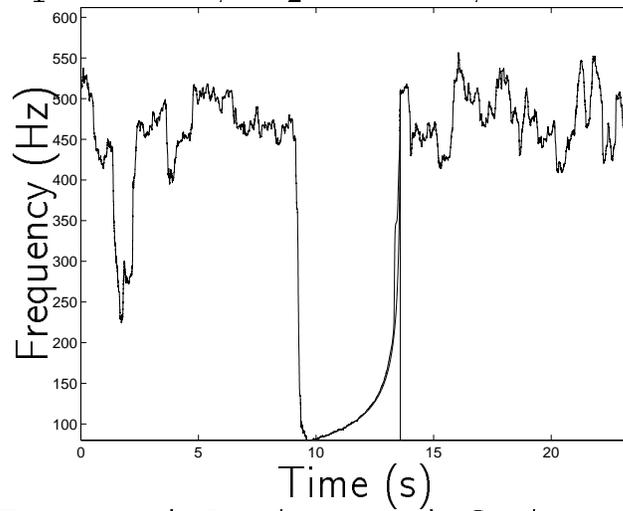
Esempio di Rivelazione di Coalescenza

$$m_1 = 1.41, m_2 = 1.41, R = 1 \text{ Mpc}$$



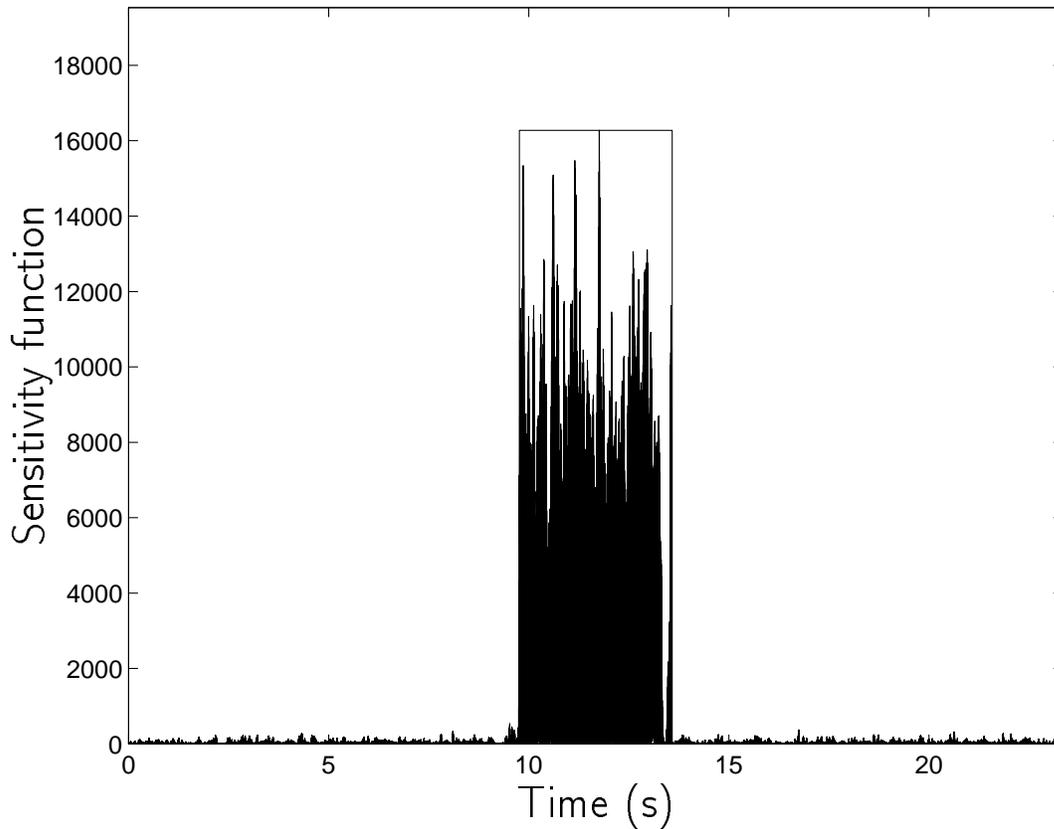
Esempio di Rivelazione di Coalescenza

$m_1 = 1.41, m_2 = 1.41, R = 1$  Mpc



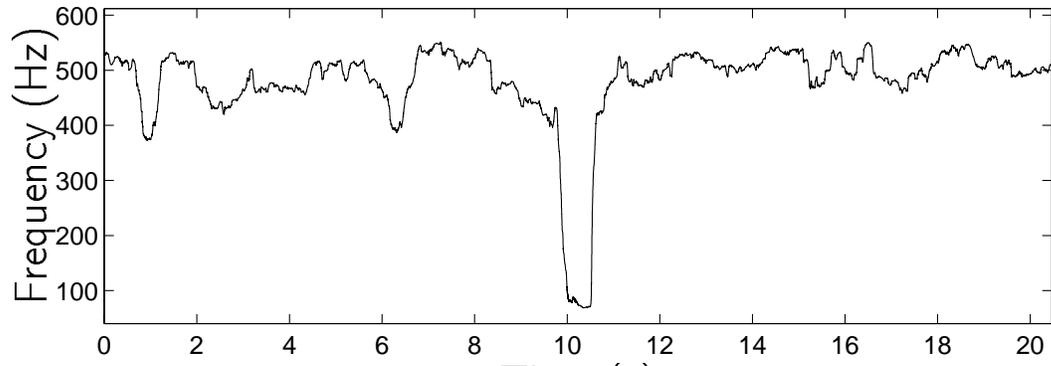
Esempio di Rivelazione di Coalescenza

$m_1 = 1.41, m_2 = 1.41, R = 1$  Mpc

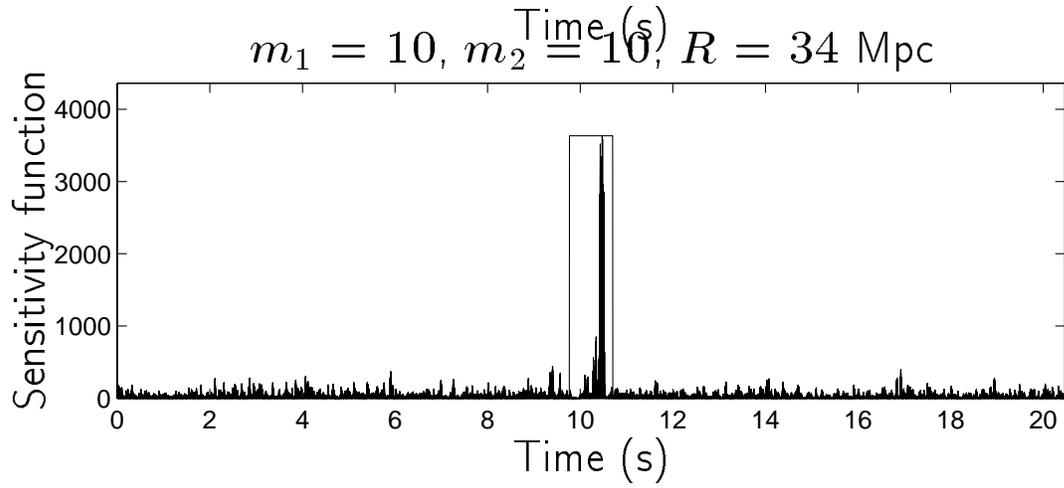


Esempio di Rivelazione di Coalescenza

$m_1 = 10, m_2 = 10, R = 34$  Mpc

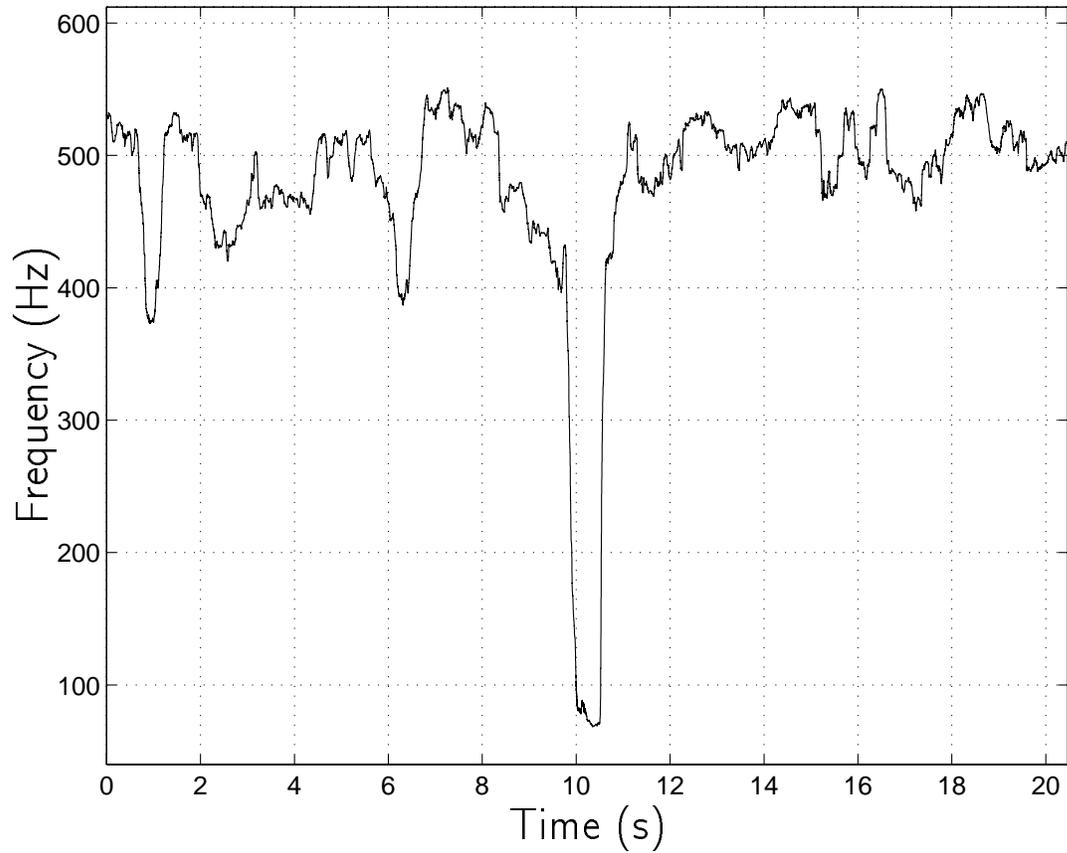


$m_1 = 10, m_2 = 10, R = 34$  Mpc



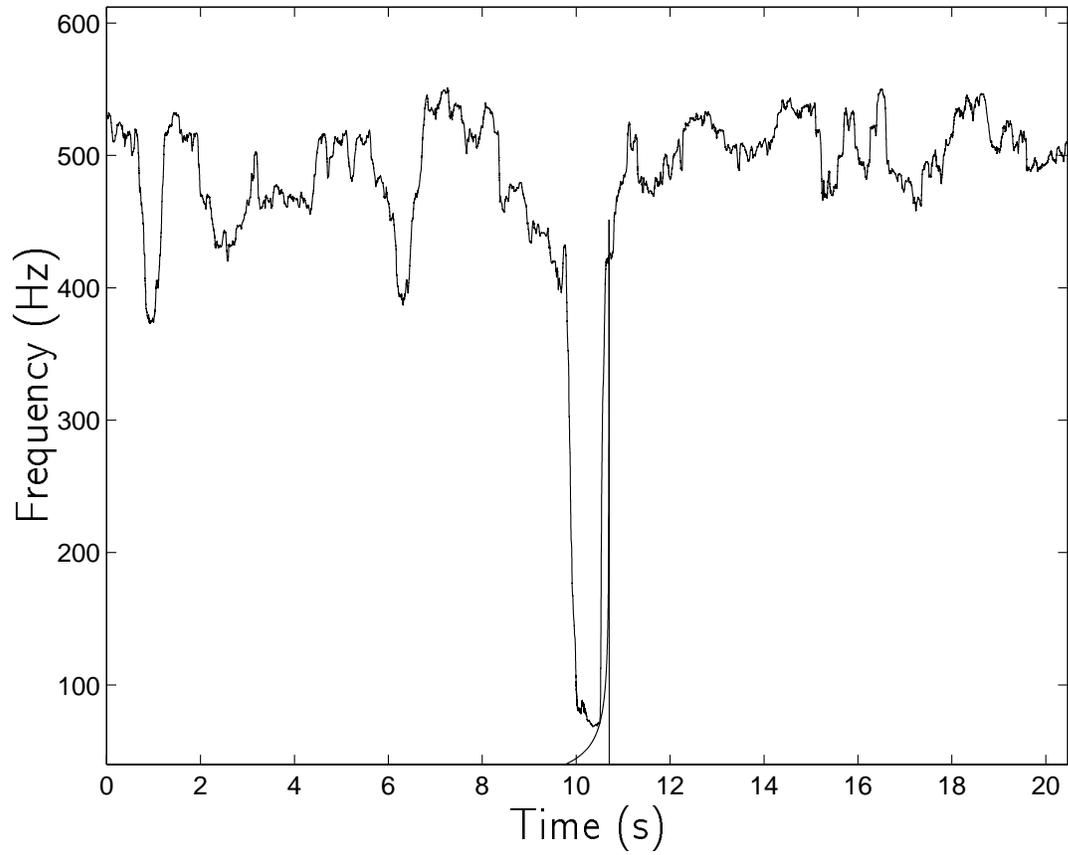
Esempio di Rivelazione di Coalescenza

$m_1 = 10, m_2 = 10, R = 34 \text{ Mpc}$



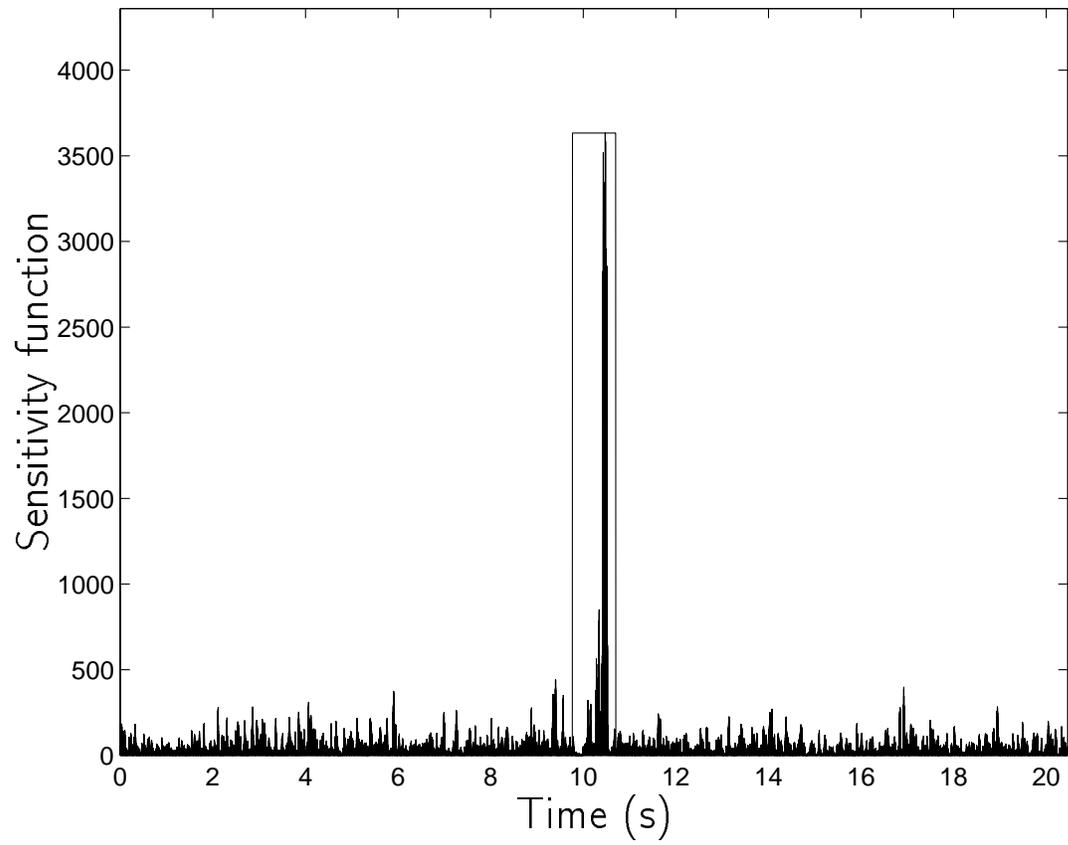
Esempio di grafico Tempo-Frequenza

$m_1 = 10, m_2 = 10, R = 34$  Mpc



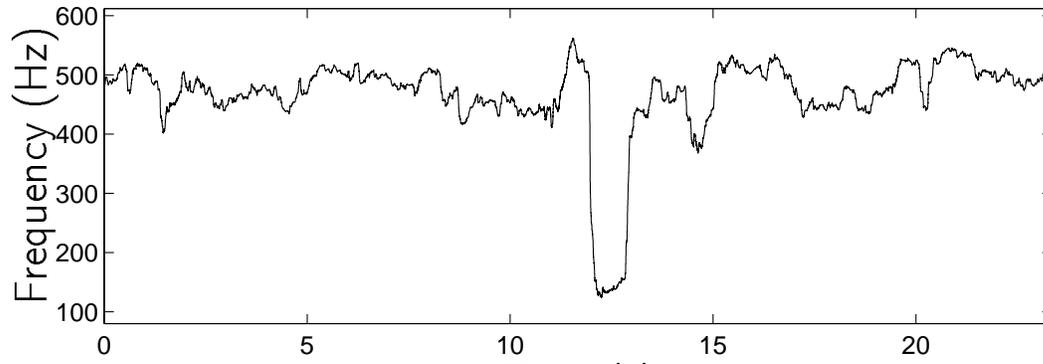
Esempio di grafico Tempo-Frequenza

$$m_1 = 10, m_2 = 10, R = 34 \text{ Mpc}$$

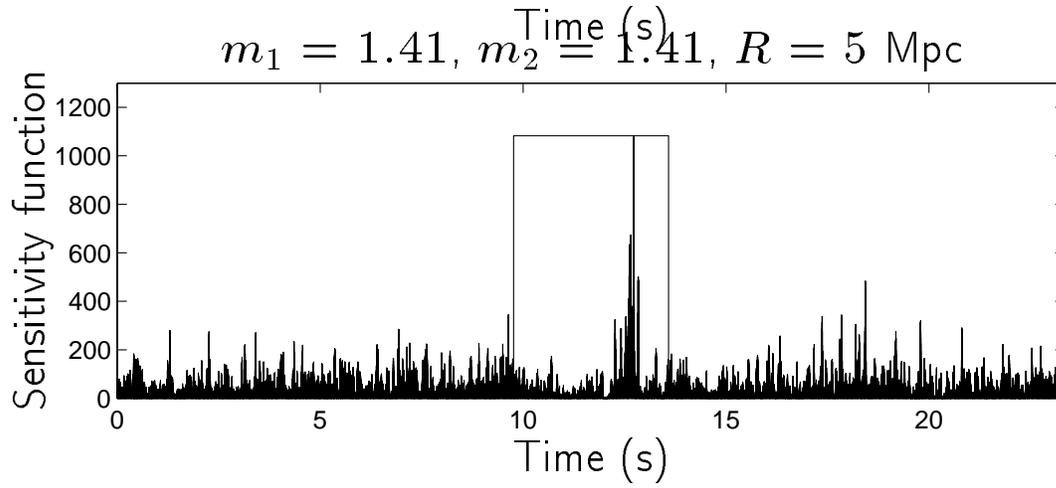


Esempio di grafico della Funzione di Sensitività

$m_1 = 1.41, m_2 = 1.41, R = 5 \text{ Mpc}$

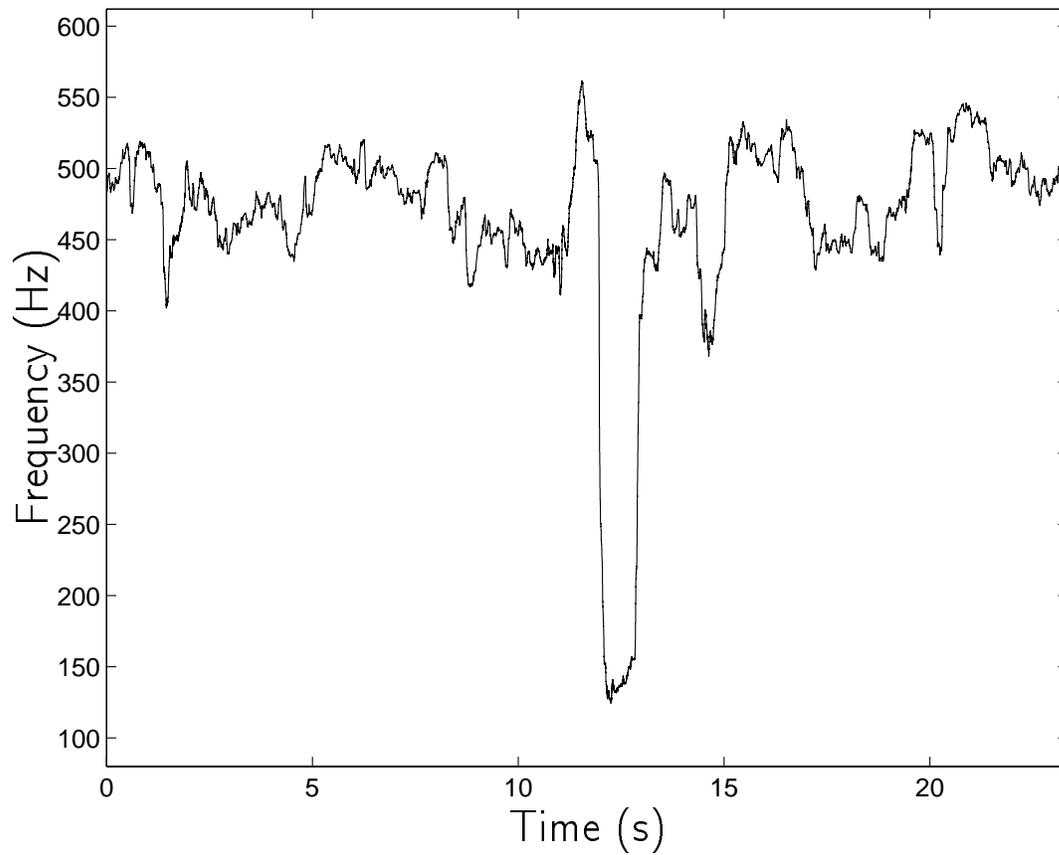


$m_1 = 1.41, m_2 = 1.41, R = 5 \text{ Mpc}$



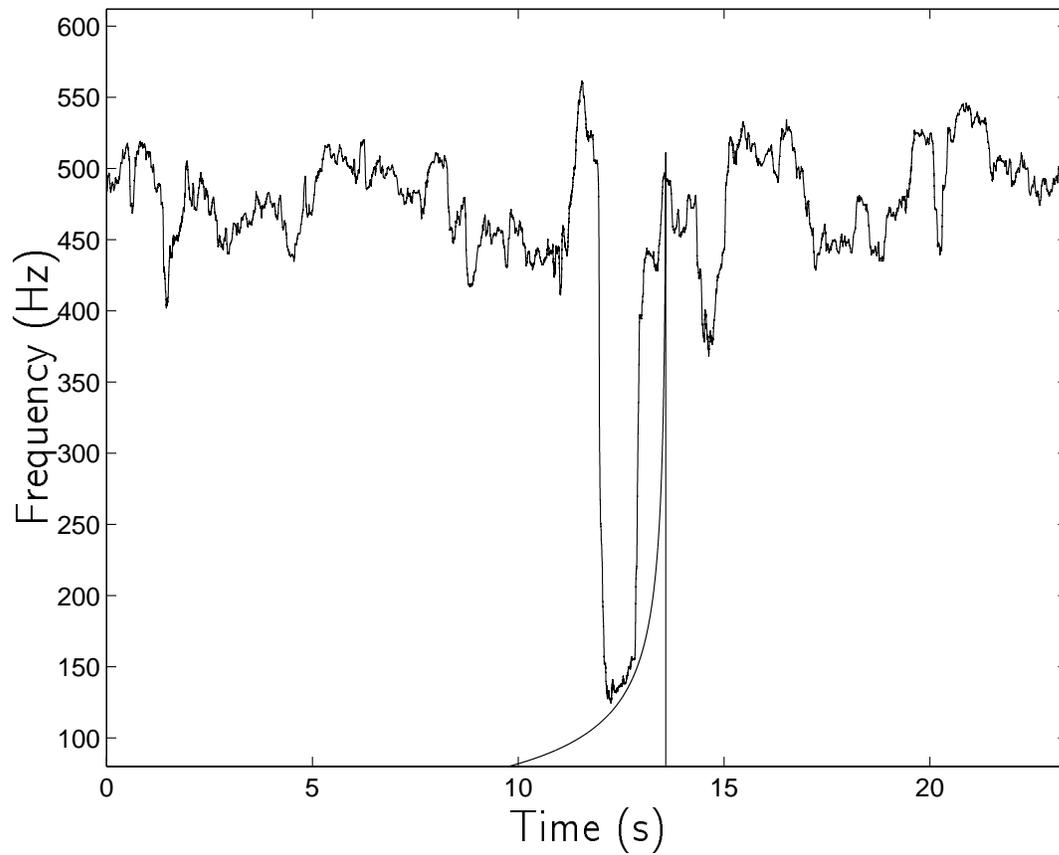
Esempio di rivelazione di coalescenza

$m_1 = 1.41, m_2 = 1.41, R = 5 \text{ Mpc}$



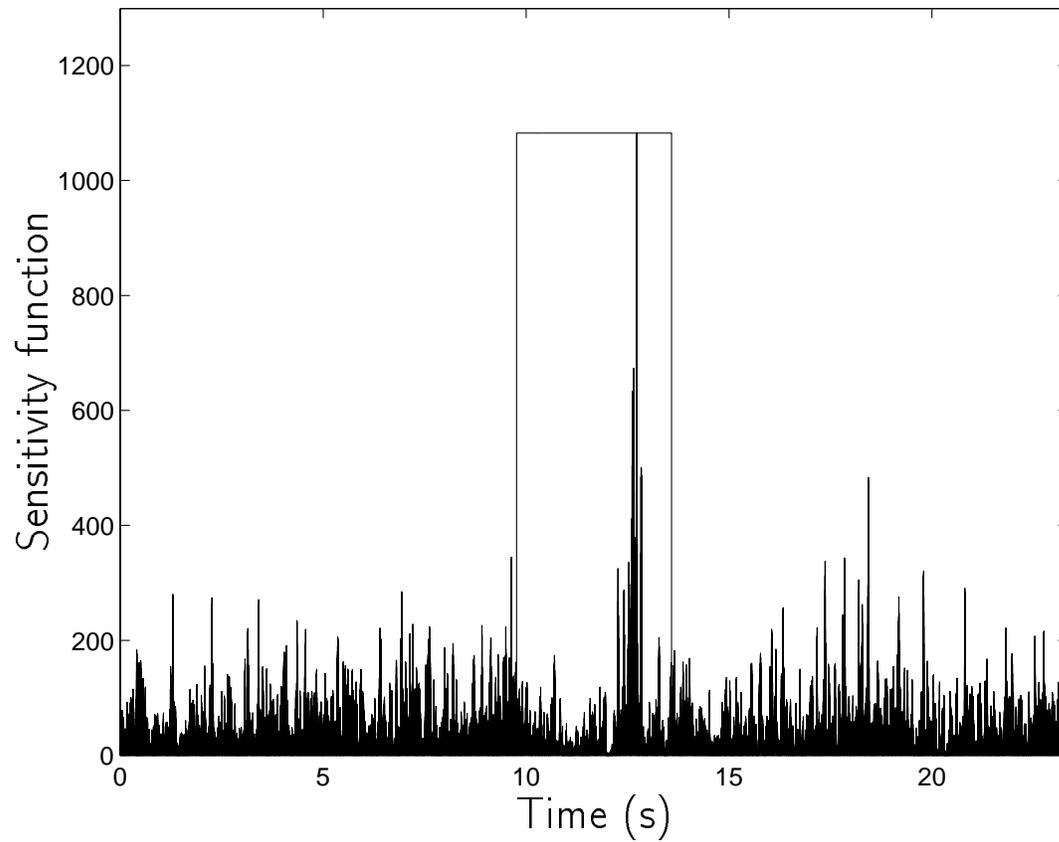
Esempio di grafico Tempo-Frequenza

$m_1 = 1.41, m_2 = 1.41, R = 5 \text{ Mpc}$



Esempio di grafico Tempo-Frequenza

$$m_1 = 1.41, m_2 = 1.41, R = 5 \text{ Mpc}$$



Esempio di grafico della Funzione di Sensitività

# Bibliografia

- K. S. Thorne, in "300 Years of Gravitation" (1987). Edited by S. W. Hawking and W. Israel. Cambridge University Press
- VIRGO Coll., "Final Design Report " (May 1997).
- A. Papoulis, "Signal Analysis" (1977). McGraw-Hill
- A. Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes" (1991). McGraw-Hill
- S. Kay, "Modern Spectral Estimation" (1988). Prentice Hall
- C. Therrien, "Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing" (1992). Prentice Hall
- E. Oja, "A Simplified Neuron Model as a Principal Component Analyzer" (1982). J. Math. Biol. 15:267-273
- P. Regalia, "An improved lattice-based adaptive notch filter" (1991) IEEE Trans. Signal Processing 39:2124-2128