

SUL PARADOSSO EPR

F. PUTZU

A. SCAFFARDI

M. SCHIANCHI

INDICE

- Introduzione paradosso EPR
- Disuguaglianza di Bell
- Generalizzazioni sulla disuguaglianza di Bell
- Esperimento di Aspect
- Teorema di non clonazione e teletrasporto quantistico
- CHSH game

CAN QUANTUM-
MECHANICAL
DESCRIPTION OF
PHYSICAL REALITY BE
CONSIDERED
COMPLETE?

Paradosso EPR:

- a favore della tesi riguardante l'incompletezza della descrizione quantistica della realtà
- necessità di introdurre nuove variabili
- ripristino del principio di località



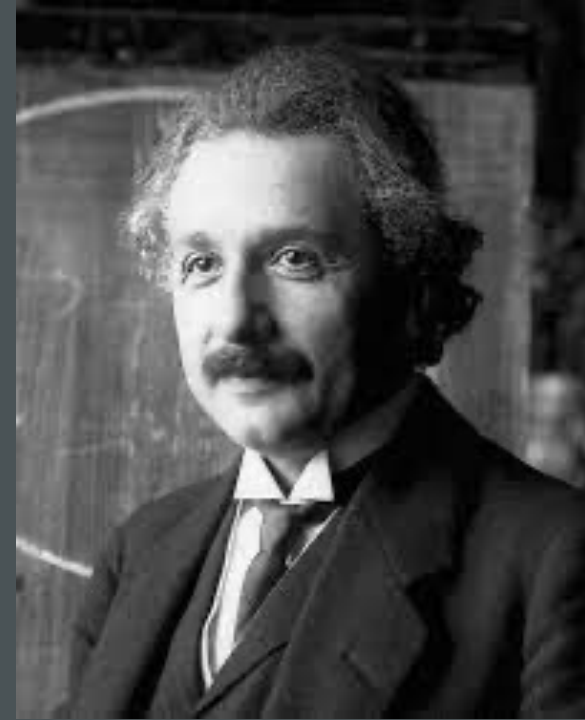
In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in

quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

PRINCIPIO DI AZIONE LOCALE:

“Due oggetti molto lontani nello spazio sono indipendenti, un’influenza esterna sul primo (ad esempio una misura) non ha un’influenza diretta sul secondo.”

(Albert Einstein, Quanten-Mechanik und Wirklichkeit, 1948)



Si mostra che assumendo che la funzione d'onda sia una descrizione completa della realtà si arriva a dire che quantità caratterizzate da operatori non commutanti possono avere realtà simultanee.

Consideriamo due sistemi (1) e (2) che possono interagire per un certo periodo di tempo dopo il quale ogni interazione cessa. Supponiamo di conoscere gli stati dei due sistemi al tempo $t=0$, allora, grazie all'equazione di Schrödinger possiamo conoscere lo stato $\Psi = (1) + (2)$ ad ogni istante successivo (anche quando i sistemi non interagiscono più).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$$

Considerando il collasso della funzione d'onda possiamo determinare lo stato di ognuno dei due sistemi dopo l'interazione: se effettuo due misure diverse sul sistema (1), il sistema (2) collasserà in due stati con due funzioni d'onda diverse (chiamiamole χ_k e ϕ_r). D'altra parte, al momento della misura i due sistemi non interagiscono più e quindi, per il principio di località, nessun cambiamento può avvenire in (2) come conseguenza di una misura in (1).

Questo porta quindi alla conclusione:

meant by the absence of an interaction between the two systems. Thus, it is possible to assign two different wave functions (in our example ψ_k and ϕ_r) to the same reality (the second system after the interaction with the first).

Now, it may happen that the two wave func-

Supponiamo che X_k e Φ_r siano autofunzioni di due operatori non commutanti, diciamo l'operatore Q e l'operatore P , corrispondenti a qualche quantità fisica.

Se i due sistemi sono semplicemente due particelle, la funzione d'onda del sistema è:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp$$

x_1, x_2 rappresentano le variabili utilizzate per descrivere rispettivamente la particella (1) e la particella (2) e x_0 è una costante.

Consideriamo il momento P della prima particella, le sue autofunzioni corrispondenti all'autovalore p sono:

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)x_1 p}$$

a questo punto si può espandere Ψ come una serie di funzioni ortogonali $u_n(x_1)$:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(x_2) u_p(x_1) dp$$

dove X_p è una autofunzione dell'operatore P con autovalore $-p$ per la seconda particella.

Si fa un ragionamento analogo utilizzando l'operatore posizione:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(x_2) v_p(x_1) dx$$

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$$

con Φ_x autofunzione dell'operatore posizione della seconda particella.

Abbiamo mostrato che X_k e Φ_r sono autofunzioni di due operatori non commutanti ($PQ - QP = h/2\pi i$).

Generalizziamo assumendo che X_k e Φ_r siano le autofunzioni degli operatori momento e posizione con autovalori p_k e q_r : misurando sia P che Q possiamo predire con certezza entrambi i valori del momento o della posizione.

Ricordando il criterio di realtà arriviamo ad una contraddizione: quindi, la negazione del fatto che la descrizione della realtà tramite la funzione d'onda è completa porta alla negazione dell'impossibilità di due quantità di avere la stessa realtà se descritte da due operatori non commutanti.

QUINDI LA DESCRIZIONE QUANTISTICA DELLA REALTA' FISICA NON E' COMPLETA

LA DISUGUAGLIANZA DI BELL

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

J. S. BELL[†]

Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(Received 4 November 1964)

I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as an argument that quantum mechanics could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential dif-

II. Formulazione

Considero una coppia di particelle con spin $1/2$

Le misurazioni possono essere effettuate su componenti selezionate dagli spin $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$

La misurazione del componente $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ fornisce $\pm 1 \xrightarrow{MQ}$ la misurazione di $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a}$ deve fornire -1

Il parametro continuo λ permette di effettuare una specificazione più determinata dello stato

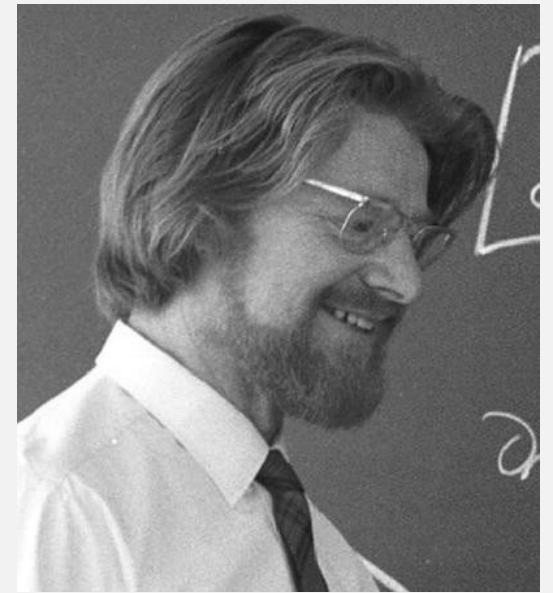
$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$$

Punto cruciale: la misura della seconda particella non dipende dal versore scelto per la misura dello spin della prima particella

$\rho(\lambda)$ distribuzione di probabilità di λ

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (\text{valore di aspettazione})$$

$$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (\text{valore di aspettazione della MQ})$$



III. Contraddizione

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$$

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda \text{ non può essere inferiore a } -1$$

$$\text{Se } A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{b}, \lambda)$$

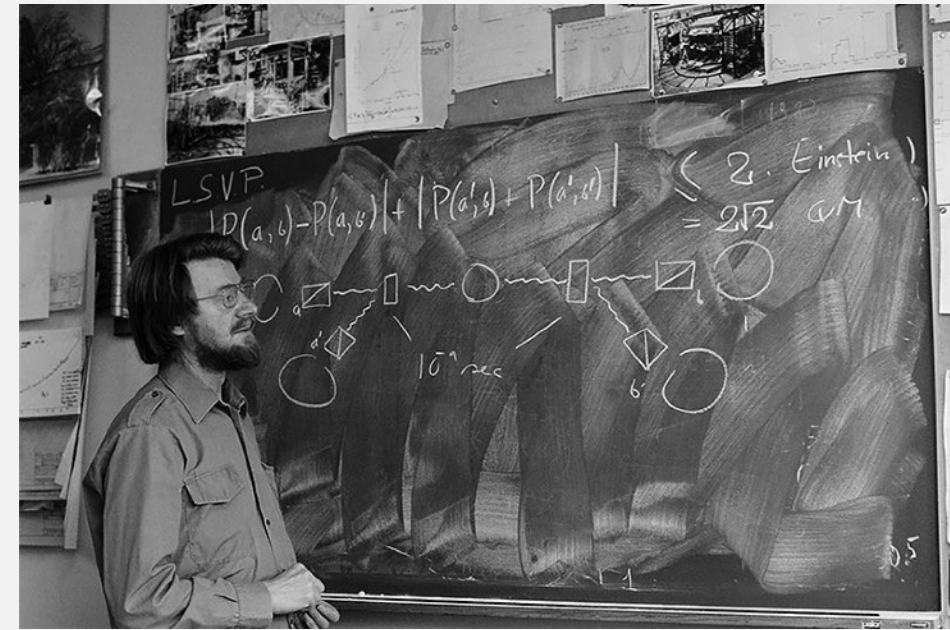
$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) d\lambda$$

\vec{c} vettore unitario

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] d\lambda = \\ &= \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1] d\lambda \end{aligned}$$

Ricordando che $A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1$

$$\begin{aligned} \left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| &\leq \int \rho(\lambda) \left[1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right] d\lambda = \\ &= 1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \end{aligned}$$



Consideriamo $\bar{P}(\vec{a}, \vec{b})$ e $-\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \varepsilon$, si dimostra che non è possibile rendere ε arbitrariamente piccolo

Supponiamo che $\left| \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \delta$

$$\left| \bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq \varepsilon + \delta$$

$$\bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad \text{dove} \quad \left| \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left| \bar{B}(\vec{a}, \lambda) \right| \leq 1$$

Con $\vec{a} = \vec{b}$

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) [\bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) + 1] d\lambda \leq \varepsilon + \delta &\implies \bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \bar{P}(\vec{a}, \vec{c}) = \int \rho(\lambda) [\bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) - \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{c}, \lambda)] d\lambda = \\ &= \int \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) [1 + \bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{c}, \lambda)] d\lambda \\ &\quad - \int \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{c}, \lambda) [1 + \bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda)] d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \bar{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \bar{P}(\vec{a}, \vec{c}) \right| &\leq \int \rho(\lambda) [1 + \bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{c}, \lambda)] d\lambda + \int \rho(\lambda) [1 + \bar{A}(\vec{b}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda)] d\lambda \\ &\leq 1 + \bar{P}(\vec{b}, \vec{c}) + \varepsilon + \delta \end{aligned}$$

IV. Conclusione

In fine

$$\left| \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| - 2(\epsilon + \delta) \leq 1 - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2(\epsilon + \delta)$$

$$4(\epsilon + \delta) \geq \left| \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| + \vec{b} \cdot \vec{c} - 1$$

Se consideriamo $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Therefore, for small finite δ ; ϵ cannot be arbitrarily small.

Thus, the quantum mechanical expectation value cannot be represented, either accurately or arbitrarily closely, in the form (2).

In una teoria in cui vengono aggiunti parametri alla meccanica quantistica per determinare le singole misurazioni deve esserci un meccanismo in base al quale un dispositivo di misura può influenzare un altro strumento, per quanto remoto.

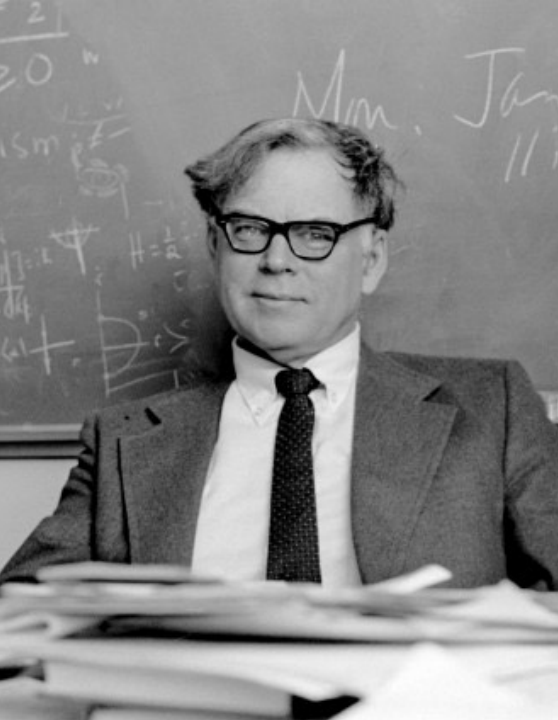
GENERALIZZAZIONI DELLA DISUGUAGLIANZA DI BELL

Comunemente si parla di disuguaglianze di Bell per indicare un insieme di disuguaglianze sviluppate dopo quella pubblicata da Bell nel suo articolo del 1964.

Nelle prossime slide presenteremo alcune delle generalizzazioni più rilevanti; usate come base teorica per progettare esperimenti in grado di verificare o smentire le previsioni portate alla luce dal paradosso EPR.

In particolare vedremo le seguenti disuguaglianze:

- CHSH
- Generalizzazione CHSH proposta da Bell
- CH74



DISUGUAGLIANZA CHSH

Una prima generalizzazione della disuguaglianza di Bell è la disuguaglianza CHSH sviluppata da Clauser, Horne, Shimony e Holt nel lavoro pubblicato su Physical Review Letter il 13 ottobre 1969.

Come prima cosa gli autori considerano un sistema di coppie di particelle correlate che si muovono liberamente, una particella per coppia entra in un apparato I_a mentre l'altra entra nell'apparato II_b , i pedici a e b sono parametri modificabili.

In ogni apparato la particella può scegliere tra due canali etichettati con $+1$ o -1 . I risultati di questa scelta sono raccolti dalle variabili $A(a)$ e $B(b)$ che possono assumere solo valori pari a ± 1 in base al canale scelto.

Supponiamo ora che una correlazione statistica tra $A(a)$ e $B(b)$ è dovuta all'informazione portata dalle due particelle. L'informazione in questo caso è rappresentata da un set di variabili (variabili nascoste) denotate con λ .

PUNTO CRUCIALE:

Il principio di località ci permette di dire che $A(a, \lambda)$ è indipendente da b e in modo analogo $B(b, \lambda)$ è indipendente da a in quanto le misure possono essere fatte a distanze arbitrariamente grandi.

Definiamo ora la funzione di correlazione $P(a, b) = \int_{\Gamma} A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda$, dove Γ è lo spazio che contiene tutte le variabili nascoste. Allora vale:

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq \int_{\Gamma} |A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(c, \lambda)|\rho(\lambda)d\lambda = \int_{\Gamma} |A(a, \lambda)B(b, \lambda)|[1 - B(b, \lambda)B(c, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda = \int_{\Gamma} [1 - B(b, \lambda)B(c, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda = 1 - \int_{\Gamma} [B(b, \lambda)B(c, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda$$

Supponiamo ora che per b e b' abbiamo $P(b',b)=1-\delta$, con $0 \leq \delta \leq 1$. Dividiamo ora lo spazio delle variabili nascoste in due parti così definite $\Gamma_{\pm} = \{\lambda \mid A(b', \lambda) = \pm B(b, \lambda)\}$ e abbiamo $\int_{\Gamma_{\pm}} \rho(\lambda) d\lambda = \frac{\delta}{2}$.

Ora:

$$\int_{\Gamma} [B(b, \lambda)B(c, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma} [A(b', \lambda)B(c, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda - 2 \int_{\Gamma_{-}} A(b', \lambda)B(c, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \geq P(b', c) - 2 \int_{\Gamma_{-}} |A(b', \lambda)B(c, \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda = P(b', c) - \delta$$

Ma ora sostituendo il risultato appena ottenuto nella espressione trovata prima otteniamo:

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 2 - P(b', b) - P(b', c)$$

Nel 1987 Bell pubblica il suo libro *Speakable and Unspeakable* nel quale propone una versione più generale della disuguaglianza CHSH in cui tiene conto della possibilità che anche gli strumenti di misura contengano in qualche modo delle variabili nascoste che possono influenzare la misura.

Bell introduce la seguente funzione di correlazione: $P(a, b) = \int \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$

Risulta chiaro che i valori permessi sono $|\bar{A}| \leq 1$ e $|\bar{B}| \leq 1$. (1)

Vale allora che:

$$\begin{aligned} P(a, b) - P(a, b') &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) - \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) (1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda))] - \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b', \lambda) (1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b, \lambda))] \end{aligned}$$

Allora:

$$|P(a, b) - P(a, b')| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda)] + \int d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b, \lambda)]$$

II. CHSH BELL

Quindi:

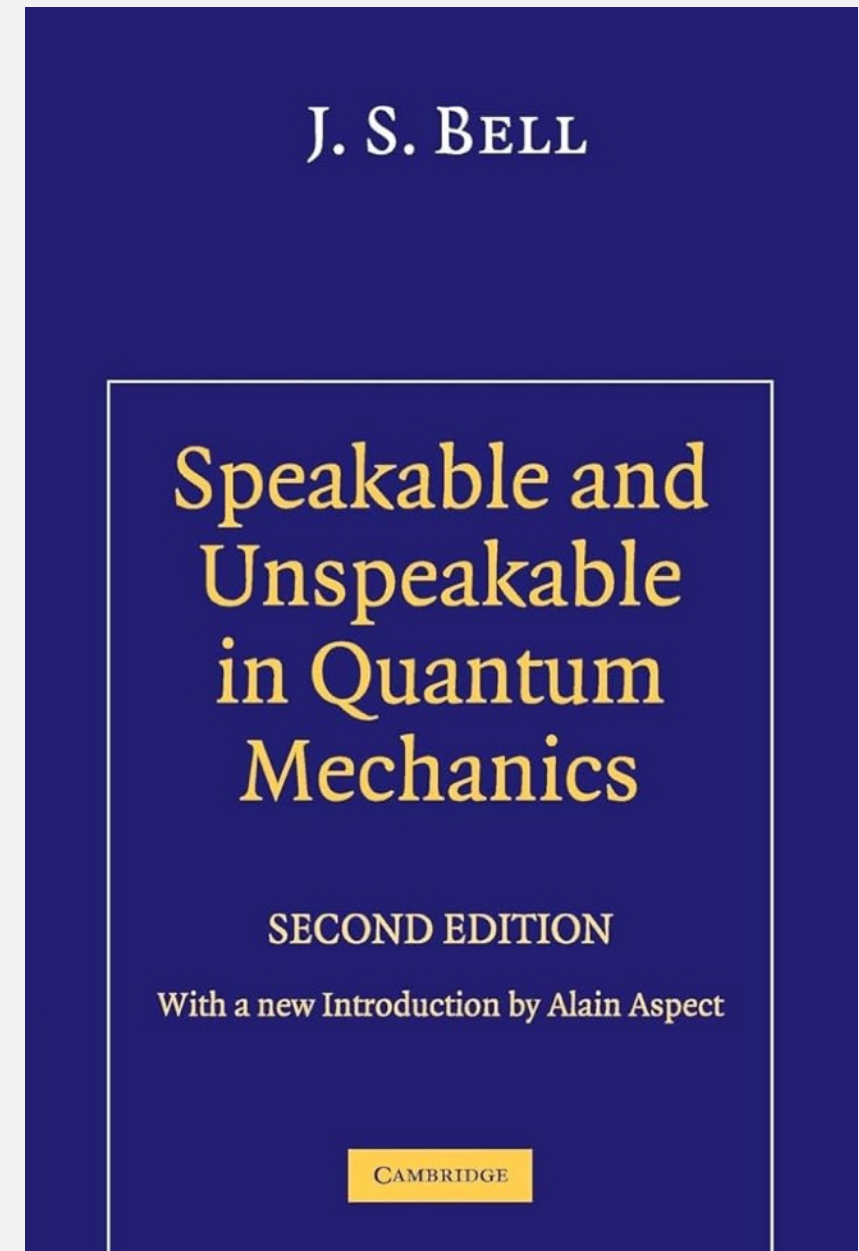
$$\left| P(a, b) - P(a, b') \right| \leq 2 \pm (P(a', b') + P(a', b))$$

Che riscritta risulta:

$$\left| P(a, b) - P(a, b') + P(a', b') + P(a', b) \right| \leq 2$$

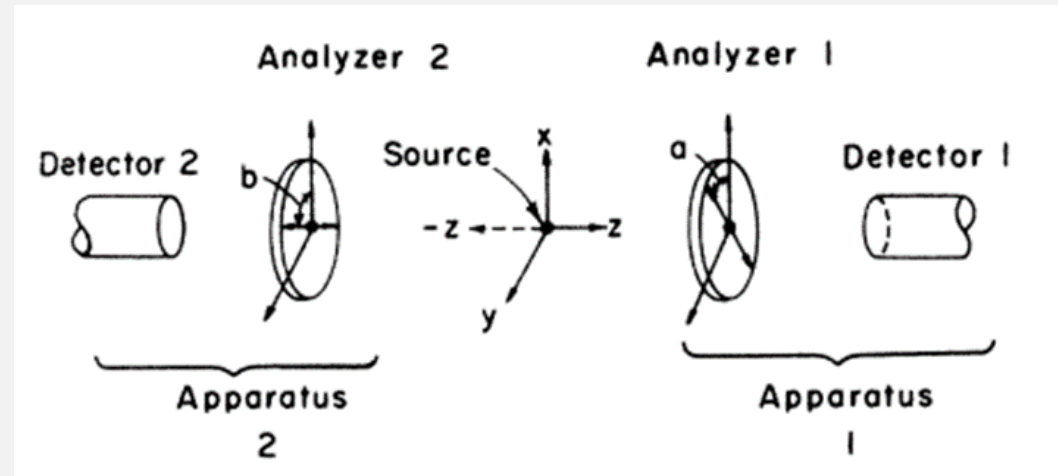
Questa è la generalizzazione della disuguaglianza CHSH fornita da Bell.

Questa è di solito la forma in cui ci si riferisce alla disuguaglianza CHSH.



Un'ulteriore versione della disuguaglianza di Bell viene proposta da Clauser e Horne in un articolo del 1974 pubblicato su PHYSICAL REVIEW D.

Si consideri che l'esperimento procede per un certo periodo di tempo nel quale vengono generate N coppie di particelle e i parametri a e b non vengono modificati.



Se N è abbastanza grande vale che il risultato finale di questo sistema sia:

$$p_1(a) = \frac{N_1(a)}{N} \quad , \quad p_2(b) = \frac{N_2(b)}{N} \quad , \quad p_{12}(a, b) = \frac{N_{12}(a, b)}{N} \quad (1)$$

Indichiamo lo stato del sistema con λ tra il tempo di emissione e di rilevamento ma di cui non facciamo nessuna assunzione.

Sia $\rho(\lambda)$ la densità di probabilità normalizzata caratterizzante dell'ensemble di emissione, in termini di questa quantità le probabilità date in precedenza possono essere riscritte come segue:

$$p_1(a) = \int_{\Gamma} p_1(a, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad p_2(b) = \int_{\Gamma} p_2(b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad p_{12}(a, b) = \int_{\Gamma} p_{12}(a, b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

Ora focalizziamo la nostra attenzione ad un caso speciale in cui $p_{12}(a, b, \lambda) = p_1(a, \lambda) p_2(b, \lambda)$. (3)

Siano a e a' due diverse orientazioni dei detector e in modo analogo per b e b' . Valgono allora le seguenti disuguaglianze se le probabilità sono sensate:

$$0 \leq p_1(a, \lambda) \leq 1$$

$$0 \leq p_1(a', \lambda) \leq 1 \quad (4)$$

$$0 \leq p_2(b, \lambda) \leq 1$$

$$0 \leq p_2(b', \lambda) \leq 1$$

TEOREMA :

Dati sei numeri x_1, x_2, y_1, y_2, X e Y tali che:

$$0 \leq x_1 \leq X$$

$$0 \leq x_2 \leq X$$

$$0 \leq y_1 \leq Y$$

$$0 \leq y_2 \leq Y$$

Allora la funzione $U = x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 - Yx_2 - Xy_1$ è limitata dalla disuguaglianza $-XY \leq U \leq 0$.

Utilizzando le disuguaglianze (4) e il teorema appena esposto otteniamo:

$$-1 \leq p_1(a, \lambda)p_2(b, \lambda) - p_1(a, \lambda)p_2(b', \lambda) + p_1(a', \lambda)p_2(b, \lambda) + p_1(a', \lambda)p_2(b', \lambda) - p_1(a', \lambda) - p_2(b, \lambda) \leq 0 \quad (5)$$

IV.CH74

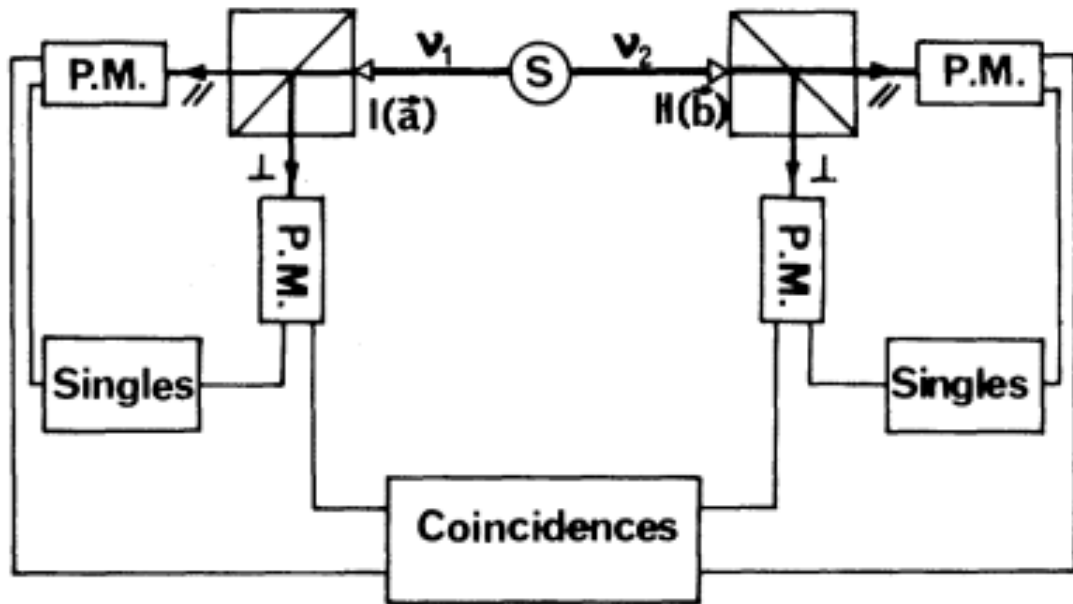
Moltiplicata per $\rho(\lambda)$ e integrata risulta:

$$-1 \leq p_{12}(a, b) - p_{12}(a, b') + p_{12}(a', b) + p_{12}(a', b') - p_1(a') - p_2(b) \leq 0 \quad (6)$$

I limiti superiori di queste relazioni possono essere testati senza conoscere N . La disuguaglianza (6) prende il nome di CH74.

Nell'appendice B del loro lavoro gli autori dimostrano che la disuguaglianza CHSH di Bell può essere vista come un corollario della disuguaglianza CH74.

ESPERIMENTO DI ASPECT 1982



- Sono presenti due polarimetri I e II che eseguono misurazioni della polarizzazione lineare sui fotoni v_1 e v_2 .
- Polarizzatori a due canali, separazione di due polarizzazioni ortogonali, seguiti da due fotomoltiplicatori

- Coefficiente di correlazione per le misurazioni lungo \vec{a} e \vec{b} :

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{R_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{-+}(\vec{a}, \vec{b})}{R_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{--}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{-+}(\vec{a}, \vec{b})}$$

Dove $R_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$ sono i tassi di coincidenza, costanti al variare degli orientamenti

- Polarizzatori: cubi formati da due prismi con ai lati pellicole dielettriche e facce antiriflesso
- Cubo I: trasmette la luce polarizzata nel piano di incidenza sull'ipotenusa (polarizzazione parallela lungo \vec{a}) mentre riflette la polarizzazione ortogonale.
- Cubo II: analogo.

- T^{\parallel} e R^{\perp} sono vicini a 1 e T^{\perp} e R^{\parallel} sono vicini a 0

- Valori misurati nell'esperimento:

$$T_1^{\parallel} = R_1^{\perp} = 0.950 \text{ e } T_1^{\perp} = R_1^{\parallel} = 0.007 \text{ a } \lambda_1$$

$$T_2^{\parallel} = R_2^{\perp} = 0.930 \text{ e } T_2^{\perp} = R_2^{\parallel} = 0.007 \text{ a } \lambda_2$$

- Davanti a ciascun moltiplicatore sono montati filtri di lunghezza d'onda 422nm o 551nm

- Il conflitto maggiore tra le previsioni della meccanica quantistica e le disuguaglianze di Bell si trova per l'insieme delle orientazioni

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}'\right) = \left(\vec{a}', \vec{b}'\right) = 22.5^{\circ} \text{ e } \left(\vec{a}, \vec{b}'\right) = 67.5^{\circ}.$$

- Per ciascuno di questi orientamenti sono state eseguite cinque corse e i rendimenti medi che si ottengono

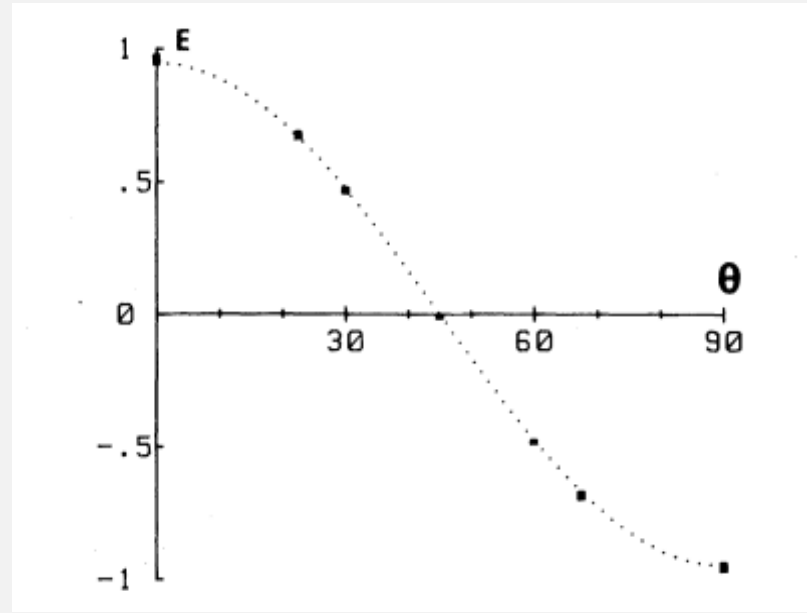
$$S_{expt} = 2.697 \pm 0.015.$$

Dove $S = E\left(\vec{a}, \vec{b}\right) - E\left(\vec{a}, \vec{b}'\right) + E\left(\vec{a}', \vec{b}\right) + E\left(\vec{a}', \vec{b}'\right)$

- Con polarimetri simmetrici, la meccanica quantistica prevede che

$$E\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = F \frac{(T_1^{\parallel} - T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} - T_2^{\perp})}{(T_1^{\parallel} + T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} + T_2^{\perp})} \cos 2\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

- In questo esperimento $S_{QM} = 2.70 \pm 0.05$



- Il grafico mostra un confronto tra i risultati dell'esperimento e le previsioni della meccanica quantistica.

- Aspect, in conclusione, con il suo esperimento produce una grande violazione delle disuguaglianze di Bell e un eccellente accordo con la meccanica quantistica.

TEOREMA DI NON CLONAZIONE

TEOREMA DI NON CLONAZIONE:

Siano X e Y due sistemi che condividono gli stessi set di stati classici Σ che hanno al massimo due elementi. Non esiste uno stato quantistico $|\phi\rangle$ di Y e un operatore unitario U agente sulla coppia (X, Y) tale che:

$$U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

Per ogni stato $|\psi\rangle$ di X .

Il teorema di non clonazione stabilisce che è impossibile creare una coppia perfetta di uno stato quantico sconosciuto a priori.

La dimostrazione del teorema risulta dall'osservare che la mappa $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ non è lineare in $|\psi\rangle$.

DIMOSTRAZIONE

Essendo Σ composto da due elementi possiamo scegliere che $a, b \in \Sigma$ con $a \neq b$. Se il teorema di non clonazione è vero deve verificarsi che:

$$U(|a\rangle \otimes |\phi\rangle) = |a\rangle \otimes |a\rangle \quad e \quad U(|b\rangle \otimes |\phi\rangle) = |b\rangle \otimes |b\rangle$$

Per linearità dovremmo avere:

$$U\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right) \otimes |\phi\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle \otimes |a\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle \otimes |b\rangle)$$

D'altronde, la richiesta che il teorema di non clonazione valga per qualunque stato $|\psi\rangle$ comporta che:

$$\begin{aligned} U\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right) \otimes |\phi\rangle\right] &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right) = \\ &= \frac{1}{2}|a\rangle \otimes |a\rangle + \frac{1}{2}|a\rangle \otimes |b\rangle + \frac{1}{2}|b\rangle \otimes |a\rangle + \frac{1}{2}|b\rangle \otimes |b\rangle \end{aligned}$$

II. DIMOSTRAZIONE

Ma quest'ultimo risultato contraddice ciò che abbiamo trovato prima, infatti:

$$\frac{1}{2}|a\rangle \otimes |a\rangle + \frac{1}{2}|a\rangle \otimes |b\rangle + \frac{1}{2}|b\rangle \otimes |a\rangle + \frac{1}{2}|b\rangle \otimes |b\rangle \neq \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle \otimes |a\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle \otimes |b\rangle)$$

E quindi possiamo concludere che non può esistere uno stato $|\phi\rangle$ e un operatore unitario U per il quale sia verificata l'equazione $U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ per ogni stato quantistico $|\psi\rangle$.

CVD

Alcune osservazioni sul teorema di non clonazione:

- Il teorema di non clonazione si riferisce a una copia perfetta, ma non dice niente rispetto alla possibilità di clonare uno stato con un limite di accuratezza. È quindi possibile fare delle copie approssimate di sistemi quantistici.
- Il teorema di non clonazione si riferisce all'impossibilità di clonare uno stato arbitrario $|\psi\rangle$. Ma è possibile clonare ogni base di uno stato standard.
- L'ultima osservazione è che il teorema di non clonazione non è valido solo nel caso dell'informazione quantistica, è anche impossibile fare una copia di un arbitrario stato probabilistico classico usando un processo classico.

TELETRASPORTO QUANTISTICO

Per teletrasporto quantistico si intende un protocollo dove un soggetto trasmette (Alice) un qubit a un ricevitore (Bob) facendo uso di uno stato quantistico in entanglement condiviso e due bits di comunicazione classica.

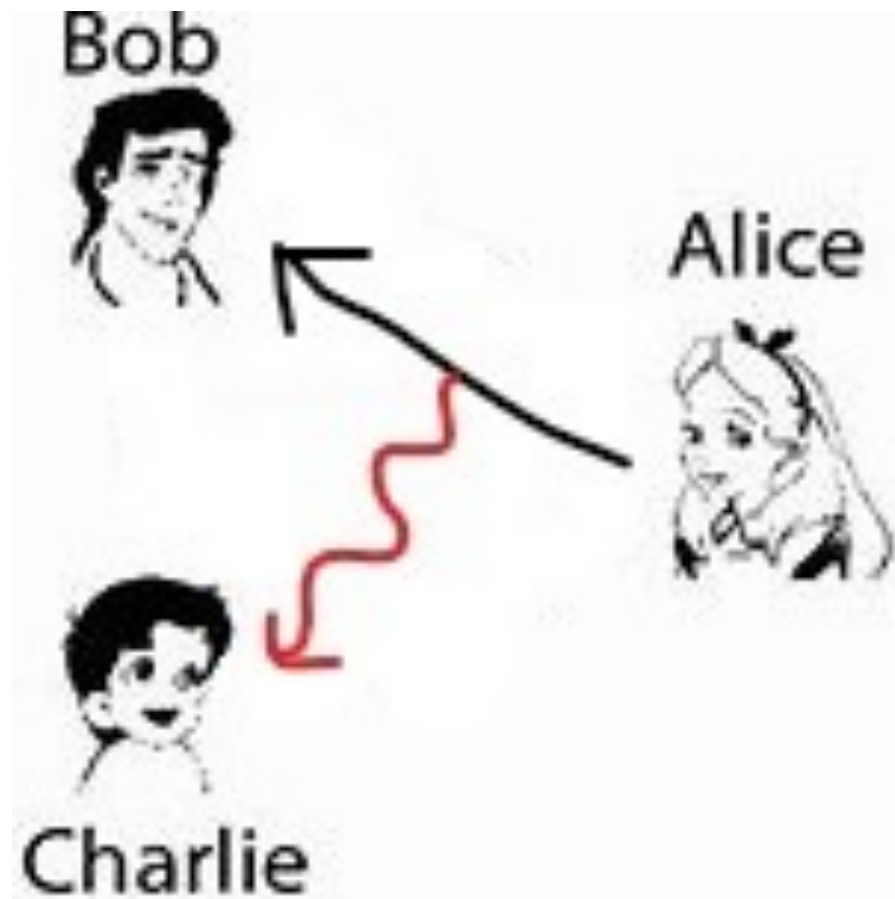
! ATTENZIONE !

Il nome teletrasporto quantistico può portare alla mente l'idea di un teletrasporto simile a quello dei film di fantascienza dove viene teletrasportata della materia ma nel caso del teletrasporto quantistico non è teletrasportata della materia, quello che è teletrasportato è l'informazione quantistica.

Assumiamo che Alice e Bob condividano un e-bit: Alice possiede un qubit A, Bob possiede un qubit B, e insieme la coppia (A, B) è nello stato $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$.

Alice entra quindi in possesso di un terzo qubit Q che desidera trasmettere a Bob. Lo stato del qubit Q è considerato sconosciuto ad Alice e Bob e non vengono fatte ipotesi al riguardo.

Dire che Alice desidera trasmettere il qubit Q a Bob significa che Alice vorrebbe che Bob avesse in mano un qubit che è nello stesso stato in cui si trovava Q all'inizio del protocollo.



TELETRASPORTO QUANTISTICO

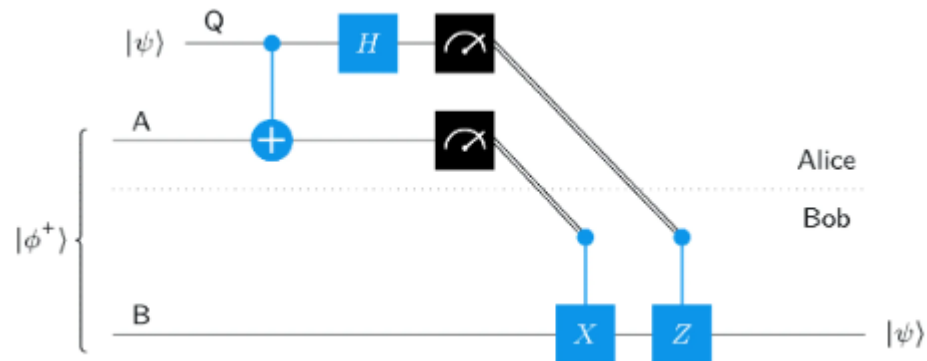
DOMANDA?

È possibile per Alice e Bob svolgere il loro compito senza nemmeno aver bisogno di utilizzare un e-bit condiviso. In altre parole, esiste un modo per trasmettere un qubit utilizzando solo la comunicazione classica?

RISPOSTA:

La risposta è no, non è possibile trasmettere informazioni quantistiche utilizzando solo la comunicazione classica.

TELETRASPORTO QUANTISTICO



Notiamo che questo protocollo non riesce a clonare lo stato di Q, cosa che già sappiamo essere impossibile per il teorema di non clonazione.

Piuttosto, una volta terminato il protocollo, lo stato del qubit Q sarà cambiato dal suo valore originale a $|b\rangle$ come risultato della misurazione eseguita su di esso.

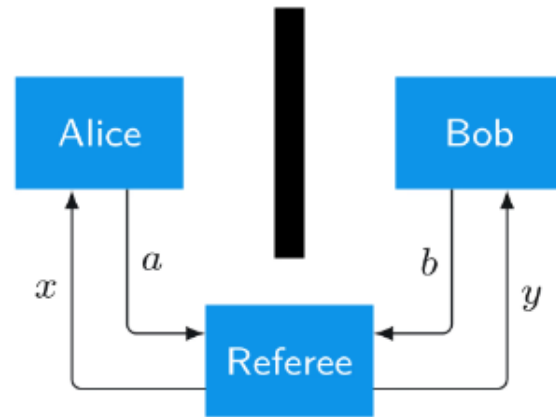
Si noti inoltre che l'e-bit è stato effettivamente "bruciato" nel processo: lo stato di A è cambiato in $|a\rangle$ e non è più entangled con B (o qualsiasi altro sistema).

Questo è il costo del teletrasporto quantistico.

CHSH GAME

NON LOCAL GAMES: giochi in cui i due partecipanti (Alice e Bob) cooperano sorvegliati da un arbitro che rispetta determinate regole, ben note ad Alice e Bob. Alice e Bob possono prepararsi per il gioco come meglio credono, ma una volta che il gioco inizia non potranno più comunicare, possiamo immaginarcelo come se i due partecipanti fossero molto distanti tra loro.

No communication
between Alice and Bob



(x, y)	win	lose
$(0, 0)$	$a = b$	$a \neq b$
$(0, 1)$	$a = b$	$a \neq b$
$(1, 0)$	$a = b$	$a \neq b$
$(1, 1)$	$a \neq b$	$a = b$

L'arbitro, utilizzando un criterio randomico, fa una domanda sia ad Alice che a Bob (indichiamo con x la domanda di Alice e con y la domanda di Bob), esiste quindi una probabilità $p(x,y)$ per ogni possibile coppia di domande (x,y) . Tutte le persone coinvolte nel gioco, anche Alice e Bob, conoscono queste probabilità $p(x,y)$, ma nessuno sa quale specifica coppia (x,y) verrà scelta fino all'inizio del gioco. Una volta ricevute le domande Alice e Bob rispondono (indichiamo con a la risposta di Alice e con b la risposta di Bob) e l'arbitro deve prendere una decisione: i due partecipanti possono o vincere o perdere in base alla correttezza della coppia di risposte (a,b) per la coppia di domande (x,y) , secondo la tabella in immagine.

Le domande e le risposte sono tutti bit (possono prendere valore 0 o 1): le possibili domande scelte dall'arbitro sono $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ tutte con probabilità $1/4$

LIMITE DELLE STRATEGIE CLASSICHE

DETERMINISTICA: in una strategia deterministica la risposta è una funzione della domanda, diciamo che $a(0)$ rappresenta la risposta di Alice quando le vien fatta la risposta 0 e $a(1)$ è la risposta quando la domanda è 1. Mostriamo analiticamente che non esiste nessuna strategia deterministica con cui Alice e Bob possano vincere sempre: infatti, se la strategia dei due vince quando $(x,y)=(0,0)$ allora deve essere $a(0)=b(0)$, se la strategia vince quando $(x,y)=(0,1)$ allora deve essere $a(0)=b(1)$ e analogamente se la strategia vince per $(x,y)=(1,0)$, allora $a(1)=b(0)$. Se la strategia vince per tutte tre le possibilità allora $b(1)=a(0)=b(0)=a(1)$ che però implica che Alice e Bob perdono se $(x,y)=(1,1)$. Si conclude facilmente che la probabilità massima di vincere per Alice e Bob utilizzando una strategia deterministica è $\frac{3}{4}$.

PROBABILISTICA: la massima probabilità di vincere è ancora 75% in quanto ogni teoria probabilistica può essere vista come una selezione randomica di strategie deterministiche.

LA STRATEGIA QUANTISTICA

Nel caso in cui Alice e Bob condividessero uno stato quantistico entangled che hanno preparato prima del gioco riuscirebbero ad incrementare la loro probabilità di vincita?

Per prima cosa definiamo un vettore che rappresenta lo stato del qubit per ogni numero reale theta (possiamo pesarlo come un angolo misurato in radianti):

$$|\psi_\vartheta\rangle = \cos(\vartheta)|0\rangle + \sin(\vartheta)|1\rangle$$

Introduciamo una matrice unitaria U_ϑ per ogni angolo theta che mappa $|\psi_\vartheta\rangle$ su $|0\rangle$ e $|\psi_{\vartheta+\pi/2}\rangle$ su $|1\rangle$:

$$U_\vartheta = |0\rangle\langle\psi_\vartheta| + |1\rangle\langle\psi_{\vartheta+\pi/2}|$$

si può facilmente verificare che è una matrice unitaria rendendosi conto che i due stati ψ sono ortogonali per ogni angolo. Questa matrice si può riscrivere anche:

$$U_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Alice e Bob iniziano in gioco condividendo uno stato entangled: Alice ha un qbit A e Bob un qbit B, insieme i due qbit (X,Y) si trovano in un determinato stato iniziale $|\phi^+\rangle$.

Le azioni di Alice su A sono descritte da:

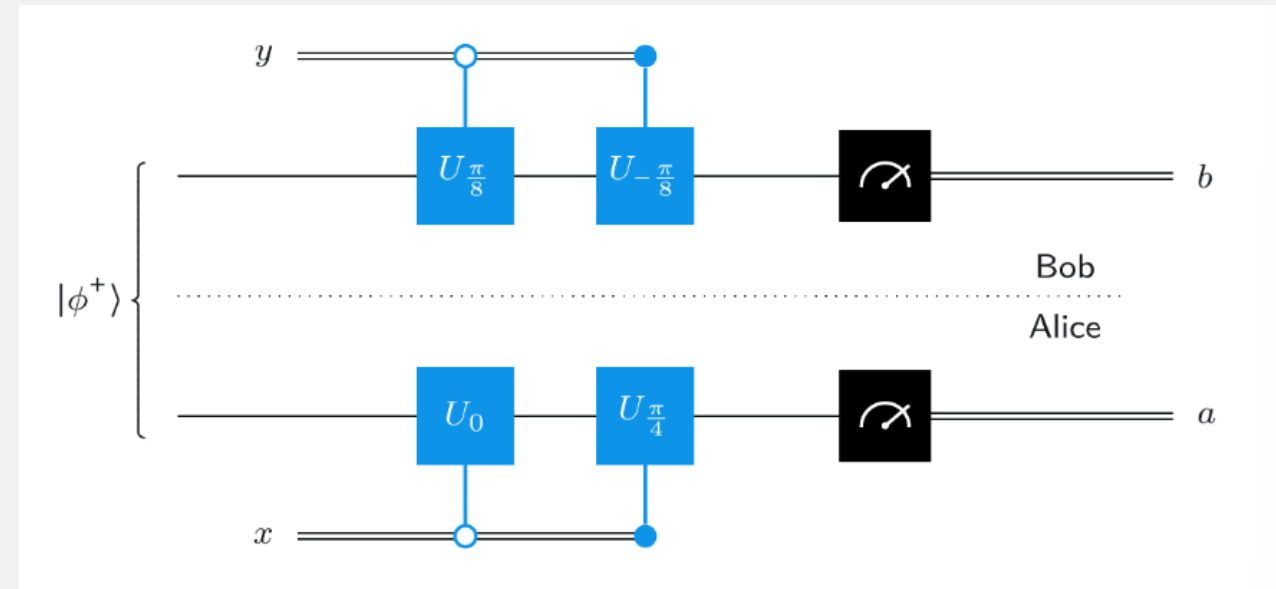
$$\begin{cases} U_0 & \text{se } x = 0 \\ U_{\pi/4} & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e dopo aver fatto questa operazione misura A sulla base canonica e questa è la sua risposta a.

Analogamente Bob:

$$\begin{cases} U_{\pi/8} & \text{se } y = 0 \\ U_{-\pi/8} & \text{se } y = 1 \end{cases}$$

e anche lui misura B sulla base canonica e utilizza quella con risposta b.



Ora, calcolando il prodotto interno tra il prodotto tensoriale tra U_0 e $U_{\pi/8}$ (nel caso $(x,y)=(0,0)$) e lo stato iniziale in cui si trovano i qbit ($|\phi^+\rangle$), possiamo ricavare le probabilità per ogni coppia di risposte (a,b) . Sommando adeguatamente queste probabilità otteniamo la probabilità di $a=b$ o $a\neq b$. Per questo esempio particolare siamo interessati alla probabilità che $a=b$ che risulta essere uguale a:

$$p(a = b) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \approx 0.85$$

che è la probabilità di vincita per Alice e Bob; analizzando gli altri casi ($(x,y)=(1,0)$, $(x,y)=(0,1)$ e $(x,y)=(1,1)$) si ritrova la stessa probabilità di vincita.

Questo è un risultato significativamente migliore di quello che si otterrebbe utilizzando una tecnica classica (deterministica o probabilistica).

L'idea alla base di questo gioco, dove l'entanglement porta ad un risultato statistico incompatibile con qualsiasi descrizione classica, è dovuta a John Bell. Molte persone, infatti, si riferiscono a questo esperimento come una dimostrazione al teorema di Bell che asserisce che la meccanica quantistica non è compatibile con le cosiddette teorie delle variabili locali nascoste.

BIBLIOGRAFIA

- “*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*” A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey (March 25, 1935)
- “*On the Einstein Podolsky Rosen paradox*” J. S. Bell, Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin (4 November 1964)
- “*Proposed experiment to test local hidden-variable theories*” J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, Physical review letters (4 August 1969)
- “*Speakable and unspeakable in quantum mechanics*” J.S. Bell, Cambridge University Press (1987)
- “*Experimental consequences of objective local theories*” J. F. Clauser, Department of Physics and Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, M. A. Horne, Department of Physics, Stonehill College, (10 August 1973)
- “*Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*” A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, Institut d'Optique Theorique et Appliquee, Universite Paris (30 December 1981)
- learning.quantum.ibm.com