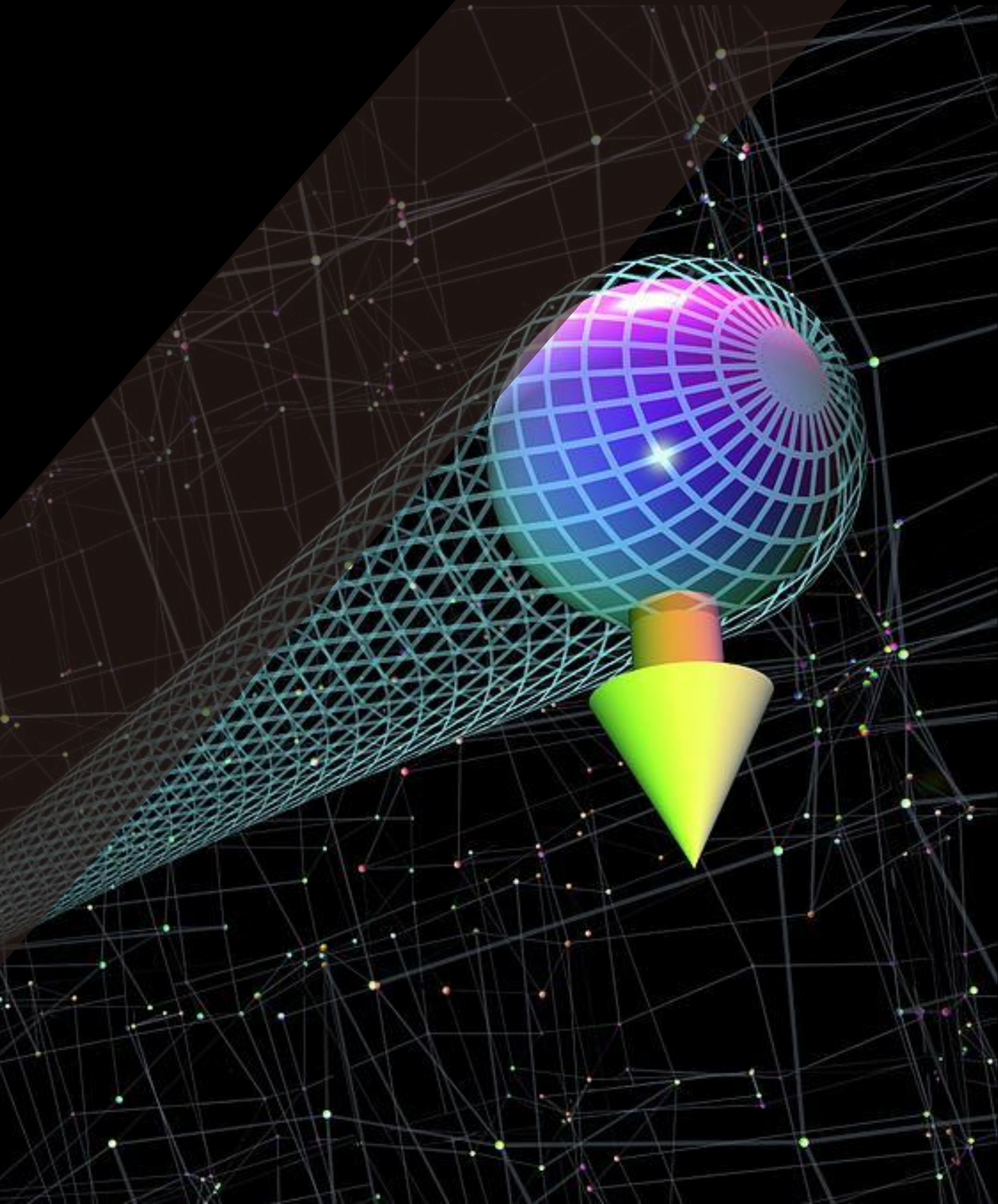
DA EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN ALLA DISUGUAGLIANZA DI BELL E AGLI ESPERIMENTI RECENTI DI CORRELAZIONE QUANTISTICA



Castagnetti Giovanni, Corazza Luca,
Ivanovski Marko.

A.A. 2023/2024

C.D.L. Fisica Triennale

Indice

INTRODUZIONE

Nel 1935, Einstein, Podolsky e Rosen cercarono di costruire una teoria deterministica che potesse soddisfare le previsioni della MQ, dimostrando che la MQ non può soddisfare simultaneamente i criteri di realtà, località e completezza. Suggerirono l'esistenza di gradi di libertà aggiuntivi, al di là di quelli considerati dalla MQ, per renderla deterministica. Tuttavia, nel 1964, J. S. Bell dimostrò che teorie con questi parametri aggiuntivi, rispettando il criterio di località, generano diseguaglianze violate dalla meccanica quantistica. Infine, esperimenti condotti da Aspect e collaboratori nel 1981-82 confermarono sperimentalmente la violazione di queste diseguaglianze, in linea con le previsioni della MQ.

STATI PURI, MISTI ed ENTANGLED

- Per stato puro si intende un insieme Ω di sistemi quantistici identici tutti descritti dallo stesso vettore di stato:

$$|\psi\rangle = \sum_m c_m |\psi_m\rangle$$

- Per miscela quantistica si intende un insieme Ω di sistemi quantistici identici separabile in sottoinsiemi Ω_n, ciascuno descritto da una funzione d'onda $|\psi_n\rangle$ con probabilità $p_n = |c_n|^2$.

Stati puri e miscele sono sperimentalmente distinguibili, in base al diverso comportamento nel risultato di diverse misurazioni.

- Uno stato si dice entangled quando non può essere scritto in forma fattorizzata come prodotto di stati di singoli sistemi. Un esempio è lo stato di singoletto che vedremo più avanti:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle]$$

Consideriamo il caso di sistema semplice S descritto in uno spazio di Hilbert H con base ortonormale $\{|e_i\rangle\}$

L'insieme Ω_p è descritto da stati della forma:

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |e_j\rangle$$

Presa un'osservabile A di tale sistema con $\hat{A}|a_k\rangle = a_k|a_k\rangle$, vogliamo calcolare le distribuzioni di probabilità relative ad una misurazione di A effettuata su Ω_p e su Ω_m.

- Per stati puri, la probabilità di ottenere l'autovalore a_i come risultato di una misura effettuata su Ω_p si ottiene proiettando $|\psi\rangle$ sull'autstato$|a_i\rangle$ per mezzo del proiettore $|a_i\rangle\langle a_i|$ e calcolandone la norma:

$$P_p(a_i) = || \, |a_i\rangle\langle a_i \mid \psi \rangle \, ||^2 = || \sum_j c_j \langle a_i \mid e_j \rangle |a_i\rangle ||^2 = \sum_j |c_i|^2 \left|\langle a_i \mid e_j \rangle\right|^2 + \sum_{j\neq k} c_k^* c_j \langle e_k \mid a_i \rangle \langle a_i \mid e_j \rangle$$

Dove il termine $\sum_{j\neq k} c_k^* c_j \langle e_k \mid a_i \rangle \langle a_i \mid e_j \rangle$ è detto termine di interferenza.

- Per gli stati misti invece, tale termine scompare e rimane:

$$P_m(a_i) = \sum_j |c_i|^2 \left|\langle a_i \mid e_j \rangle\right|^2$$

La differenza tra i due sta proprio nel termine di interferenza:

$$P_p(a_i) - P_m(a_i) = \sum_{j\neq k} c_k^* c_j \langle e_k \mid a_i \rangle \langle a_i \mid e_j \rangle$$

Consideriamo ora il caso di un sistema composto da due sottosistemi S_1 relativo a H_{s_1} ed S_2 relativo a H_{s_2}, con basi rispettivamente $\{|\alpha\rangle\}$ e $\{|\beta\rangle\}$.

Lo spazio di Hilbert totale associato sarà dato dal prodotto tensoriale tra i due spazi di Hilbert associati ai due sottosistemi $H = H_{s_1} \otimes H_{s_2}$.

L'insieme Ω_p è l'insieme degli stati puri del tipo:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$$

Vogliamo calcolare le distribuzioni di probabilità sia per misurazioni di osservabili relative ad un solo componente del sistema, sia per misure di osservabili di tutto il sistema.

- Per osservabili di una sola componente, considerando un osservabile A relativa al sottosistema S_1, la probabilità di ottenere l'autovalore (a_i) nel caso di stato puro è:

$$P_p(a_i) = ||\big(|a_i\rangle\langle a_i| \otimes \hat{1}^{(s_2)}\big)|\psi\rangle||^2 = \sum_j |c_j|^2 |\langle\, a_i \mid \alpha_j \,\rangle|^2$$

L'operatore identità $\hat{1}^{(s_2)}$ va introdotto poiché il proiettore agisce solo sugli stati relativi a S_1.

Nel caso di stato misto:

$$P_m(a_i) = \sum_j |c_j|^2 |\langle\, a_i \mid \alpha_j \,\rangle|^2$$

Dunque:

$$P_p(a_i) - P_m(a_i) = 0$$

Cioè per misure effettuate su un solo sotto-sistema, stato puro e miscela sono indistinguibili.

- Per <u>osservabili relative a tutto il sistema</u> S=$S_1 + S_2$, cioè un'osservabile del tipo $\Gamma = \hat{A}^{(1)} \otimes \hat{B}^{(2)}$, la probabilità che una misurazione effettuata su Ω_p (puro) fornisca la coppia a_i, b_j vale:

$$P_p(a_i, b_j) = ||\left(|a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_j\rangle\langle b_j|\right)|\psi\rangle||^2$$

$$= \sum_k |c_k|^2 |\langle a_i \mid \alpha_k \rangle|^2 \left|\langle b_j \mid \beta_k \rangle\right|^2 + \sum_{k \neq m} c_m^* c_k \langle \alpha_m \mid a_i \rangle\langle a_i \mid \alpha_k \rangle\langle \beta_m \mid b_j \rangle\langle b_j \mid \beta_k \rangle$$

Per una misura su Ω_m (miscela), scompare il termine di interferenza:

$$P_m(a_i, b_j) = \sum_k |c_k|^2 |\langle a_i \mid \alpha_k \rangle|^2 \left|\langle b_j \mid \beta_k \rangle\right|^2$$

OPERATORE DENSITA'

Per considerazioni che faremo più avanti è utile ricordare brevemente come si definisce l'operatore densità nel caso di stati puri e miscele.

Miscele:

Supponiamo che il sistema sia in una miscela statistica, ovvero che possa trovarsi in uno degli stati $|\psi_i\rangle$ con probabilità p_i. L'operatore densità è così definito:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

($|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ è il solito proiettore sullo stato $|\psi_i\rangle$)

Stati puri:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

La somma si riduce al solo proiettore su tale stato puro $|\psi\rangle$.

ARTICOLO EPR

L'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen del 1935 vuole dimostrare la non completezza della meccanica quantistica, intesa come descrizione della realtà, ovvero dimostrare l'incompatibilità delle seguenti tre condizioni:

- *Principio di realtà*: Se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo prevedere con certezza (cioè, con probabilità unitaria) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa quantità fisica, cioè una proprietà indipendente da eventuali osservatori esterni.
- *Principio di località*: Se un sistema fisico rimane per un certo tempo isolato da altri sistemi, allora l'evoluzione delle sue proprietà durante questo intervallo di tempo complessivo non può venire influenzato da operazioni eseguite su altri sistemi.
- *Condizione di completezza*: Ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica.

Stabiliti questi concetti di base, Einstein, Podolsky e Rosen procedono con un discorso generale che mette in luce il paradosso, partendo proprio dai presupposti della teoria quantistica.

In particolare, riveste un ruolo fondamentale il *principio di indeterminazione*: se A e B sono due operatori non commutanti corrispondenti a due osservabili di un sistema, allora la precisa conoscenza di una di queste preclude la conoscenza dell'altra. Assumendo vera questa affermazione, si arriva a due possibili conseguenze (non possono essere contemporaneamente false):

(1) *La descrizione quantistica della realtà, fornita dalla funzione d'onda, è incompleta.*

(2) *Quando gli operatori non commutano, le corrispondenti grandezze fisiche non possono essere simultaneamente reali (principio di realtà).*

Inoltre, considerando due sistemi $S_1 e\ S_2$ interagenti tra $t = 0$ e $t = T$, la non-separabilità comporta che, come conseguenza della misurazione di due osservabili non commutanti operate su S_1 al tempo $t > T$, il sistema S_2 si trovi in stati descritti da due differenti funzioni d'onda. *Siccome i due sistemi non interagiscono più, nessun cambiamento "reale" può però aver luogo su S_2 come conseguenza di una qualunque operazione su S_1*. Questo significa che è possibile assegnare due diverse funzioni d'onda alla stessa "realtà" fisica.

Gli autori propongono poi una situazione paradossale: sia A un operatore relativo al sistema S_1 e sia P un operatore relativo a S_2; supponiamo inoltre che gli autostati di P siano strettamente correlati a quelli di A, in modo tale che la conoscenza dell'autostato di A in cui si trova S_1 determini completamente l'autostato di P in cui si trova S_2. Supponiamo inoltre di conoscere le proprietà del sistema per $0 < t < T$. Se, a $t_1 > T$, si misura A per S_1, allora si può prevedere con certezza, e senza disturbare in alcun modo il sistema S_2, il valore della quantità P. Secondo la condizione di realtà, dunque, P è un elemento di realtà per S_2. Sia poi Q un operatore relativo a S_2 incompatibile con P. Siccome $[P, Q] \neq 0$, allora S_2 può essere descritto da due differenti funzioni d'onda, che possono essere autofunzioni relative a P e Q rispettivamente. *Partendo dalla negazione di (1), che la funzione d'onda fornisca una descrizione completa della realtà, si è giunti alla negazione della sola alternativa (2), cioè, che due grandezze fisiche non compatibili possano avere realtà simultanea.*

Se ne deve concludere che la descrizione quantomeccanica della realtà fisica fornita dalle funzioni d'onda non è completa.

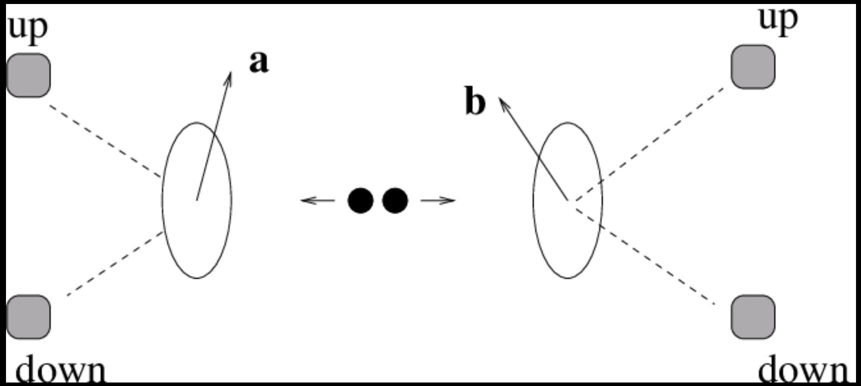
FORMULAZIONE BOHM-AHARONOV

Il paradosso EPR può essere formulato in modo equivalente se espresso in termini della correlazione tra spin di una coppia di particelle, come suggerito da Bohm e Aharonov.

Si considera una coppia di particelle identiche *I* e *II* di spin ½, a ciascuna è associato uno spazio di Hilbert bidimensionale, rispettivamente H_I ed H_{II} , e sono accoppiate a formare uno stato di singoletto di spin antisimmetrico $|00\rangle$ in $H_I \otimes H_{II}$, di dimensione 4. La funzione d'onda del sistema sarà dunque:

$$|00\rangle = |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle]$$

Dove $|\pm\rangle$ sono gli autostati di spin lungo un asse z arbitrario relativo rispettivamente ad I e II, corrispondenti agli autovalori $\pm\frac{\hbar}{2}$. <u>Inoltre è utile notare che il singoletto è invariante sotto rotazione.</u>



Sia prima che dopo la separazione delle due particelle, questa funzione descrive lo stato del sistema come sovrapposizione di due possibili stati:

$$|+\rangle \otimes |-\rangle \quad e \quad |-\rangle \otimes |+\rangle$$

Le grandezze da misurare sono proprio due delle tre componenti dello spin di uno dei due atomi, che tra di loro sono incompatibili, cioè sono operatori non commutanti:

$$[\widehat{S_i}, \widehat{S_j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\widehat{S_k}$$

Per esempio se prendiamo come grandezza fisica A la componente S_x dello spin di I e la misuriamo, avremo due possibili valori: $\pm\frac{\hbar}{2}$.

Nel primo caso la particella I collassa nello stato $|+\rangle$ relativo all'autovalore $+\frac{\hbar}{2}$ di S_x.

Dunque la funzione d'onda totale sarà necessariamente: $|+\rangle \otimes |-\rangle$

Quindi la seconda particella sarà nello stato $|-\rangle$ relativo all'autovalore $-\frac{\hbar}{2}$ di S_x. Nel secondo caso è del tutto analogo ma gli autovalori e auto-vettori sono invertiti.

Se poi come grandezza fisica B prendiamo la componente S_z dello spin di I e la misuriamo, otterremmo gli stessi due possibili valori del caso precedente e il ragionamento seguente si ripete identico.

<u>In questo modo Bohm dimostra che le due grandezze generiche A e B sono riconducibili a due osservabili</u> (S_x e S_z) <u>i cui operatori non commutano, e quindi le due funzioni d'onda rappresentano due stati di realtà simultanea</u> <u>(poiché I e II non interagiscono più e quindi I non può aver influenzato II)</u> <u>per tali operatori relativi alla seconda particella nonostante essi non commutino!</u>

In entrambi i casi, EPR e Bohm-Aharonov, si arriva a dimostrare che, misurando tali grandezze sul primo dei due sistemi, si riesce a determinare il valore anche sul secondo sistema, senza però cambiarne lo stato. Cioè entrambe le formulazioni dimostrano che le due funzioni di stato rappresentano due stati di realtà simultanea per il secondo sistema, relativi però ad operatori non commutanti, giungendo così all'assurdo.

Inoltre avendo negato l'unica alternativa possibile tra le due, e non potendo essere entrambe false, questo implica che la meccanica quantistica sia una teoria incompleta, e che la descrizione fornita dalla funzione d'onda non è sufficiente.

Un altro aspetto da prende in considerazione del paradosso EPR è il seguente:

Lo stato:

$$|00\rangle = |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle]$$

Rappresenta uno stato puro con:

$$|\alpha_1\rangle = |+\rangle, |\beta_1\rangle = |-\rangle, c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\alpha_2\rangle = |-\rangle, |\beta_2\rangle = |+\rangle, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La miscela corrispondente è:

$$|\alpha_1\rangle \otimes |\beta_1\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle \quad p_1 = \frac{1}{2}$$

$$|\alpha_2\rangle \otimes |\beta_2\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle \quad p_2 = \frac{1}{2}$$

Prendiamo ora $\Gamma = |+_x\rangle\langle +_x| \otimes |+_x\rangle\langle +_x|$, con $|\pm\rangle_x$ autostati dell'operatore di spin lungo x. Ricordando che:

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$$

Allora abbiamo che:

$$P_p(+_x, +_x) = 0 \quad P_m(+_x, +_x) = \frac{1}{4}$$

Stato puro e miscela sono dunque distinguibili sperimentalmente.

Inoltre, secondo la MQ, la misurazione effettuata su I comporta un cambiamento istantaneo dello stato di II, contrariamente a quanto assunto nel paradosso EPR, come ipotesi di base vi è infatti la località e il realismo.

VARIABILI NASCOSTE

Per risolvere l'assurdo, per Einstein e collaboratori, l'unica ipotesi sensata da dover abbandonare era la completezza della meccanica quantistica. Erano convinti che potesse esistere una teoria completa della meccanica quantistica, che facesse però ricorso a variabili nascoste locali, in cui quindi l'informazione sullo stato della particella è già contenuta in essa prima della sua misurazione, essa è dunque locale in ogni particella.

Le proprietà di tali tipo di teorie sono le seguenti:

1. Esiste una famiglia di parametri λ, variabili nascoste, la cui conoscenza permette di prevedere in modo deterministico l'evoluzione del sistema.
2. Alle variabili nascoste è associata una densità di probabilità $\rho(\lambda)$, coerente con le predizioni della MQ.
3. Esiste una relazione tra il valore assunto da tali variabili nascoste e il valore di ogni osservabile che viene misurata.
4. Esiste una regola che stabilisce la distribuzione statistica di λ dopo ogni misurazione.

Sarà proprio J.S. Bell a dare una prima formulazione matematica di questa teoria.

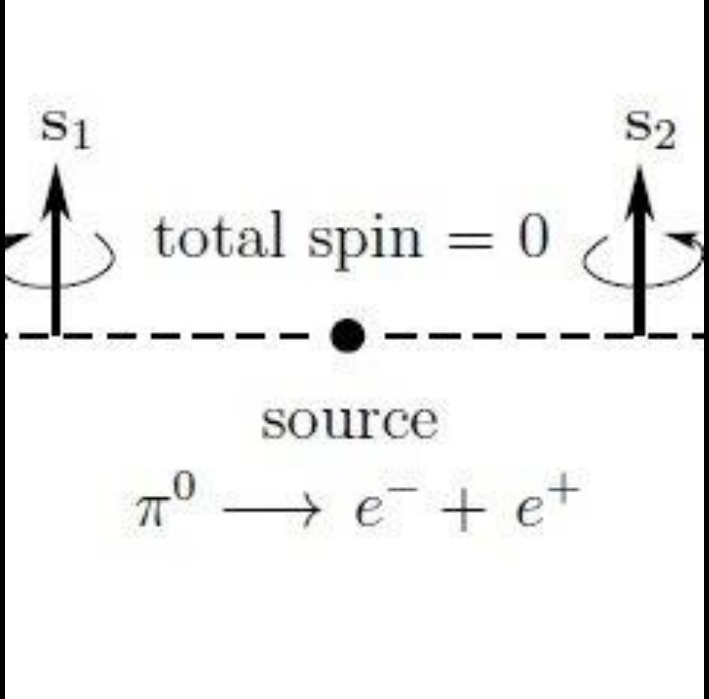
DISEGUAGLIANZE DI BELL

Nel 1964 John Stewart Bell propose un esperimento per risolvere il dibattito. Questo coinvolgeva una coppia elettrone-positrone correlata, ottenuta per decadimento di un pione neutro (difficilmente ottenibili sperimentalmente, ~1.2% di probabilità):

$$\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$$

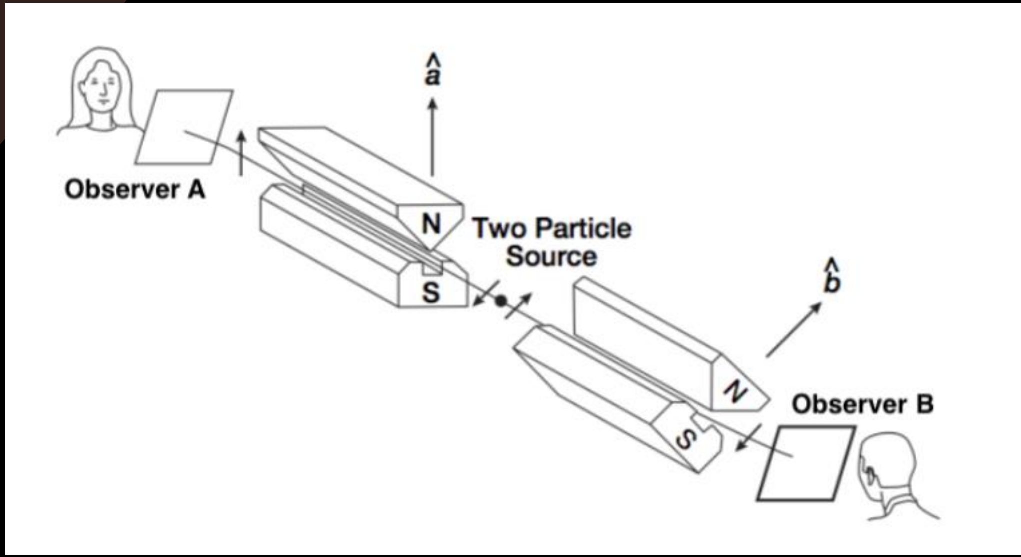
Dato che lo spin iniziale è zero, dalla conservazione del momento angolare totale allora anche dopo il decadimento dovrà essere nullo, di conseguenza elettrone e positrone si troveranno in uno stato di singoletto di spin.

Bell riuscì a fornire una possibile formulazione matematica della meccanica quantistica utilizzando variabili locali nascoste.



Teorema di Bell

Consideriamo un sistema fisico S composto da due sottosistemi S_1, S_2 (le due particelle), di cui possiamo fare misure separatamente. Consideriamo per semplicità particelle di spin ½ e apparati Stern-Gerlach. Indichiamo con $\vec{a}$ e $\vec{b}$ i versori rispettivamente degli apparati (come in figura) per S_1 e S_2.



Indichiamo con:

A: spin di S_1 relativa alla direzione $\vec{a}$.

B: spin di S_2 relativa alla direzione $\vec{b}$.

A e B agiscono su spazi di Hilbert distinti (associati a ciascuna particella), di conseguenza sono operatori commutanti, e quindi osservabili compatibili.

L'esperimento si divide in tre fasi:

1. Preparazione ripetuta del sistema S in un determinato stato.
2. Evoluzione del sistema per una certa durata.
3. Misura di A e B in regioni di spazio separate, a distanza arbitraria. Nel nostro caso i dispositivi si Stern-Gerlach sono a distanza arbitraria.

S_1 e S_2 attraverseranno due apparati distinti, dunque è possibile studiare la correlazione tra i valori assunti da A e B al variare delle orientazioni dei versori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dei due dispositivi.

Supponiamo che i valori assunti da A e B non dipendano soltanto dai versori ma anche dalle variabili nascoste λ, e quest'ultime sono indipendenti da $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

L'ipotesi fondamentale è che esistano quindi delle funzioni deterministiche:

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1 \qquad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$$

che rappresentino le osservabili A e B.

E’ importante osservare che l’ipotesi di *località* impedisce dipendenze del tipo $A(\vec{a},\vec{b},\lambda)$ e $B(\vec{a},\vec{b},\lambda)$, le quali implicherebbero una dipendenza istantanea di quanto osservato in S_1 da ciò che avviene in S_2.

Ovviamente non si conosce il valore di tali variabili nascoste, ma esse soddisfano:

$$\rho(\lambda) \geq 0 \qquad \int \rho(\lambda) d\lambda = 1$$

Fissati $\vec{a}$ e $\vec{b}$, la correlazione tra A e B è:

$$C(\vec{a},\vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda)$$

Siano $\overrightarrow{a'}$ e $\overrightarrow{b'}$ altre due direzioni per S_1 e S_2 rispettivamente, allora si ha:

$$C(\vec{a},\vec{b}) - C(\vec{a},\overrightarrow{b'}) = \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda) B(\overrightarrow{b'},\lambda)] =$$

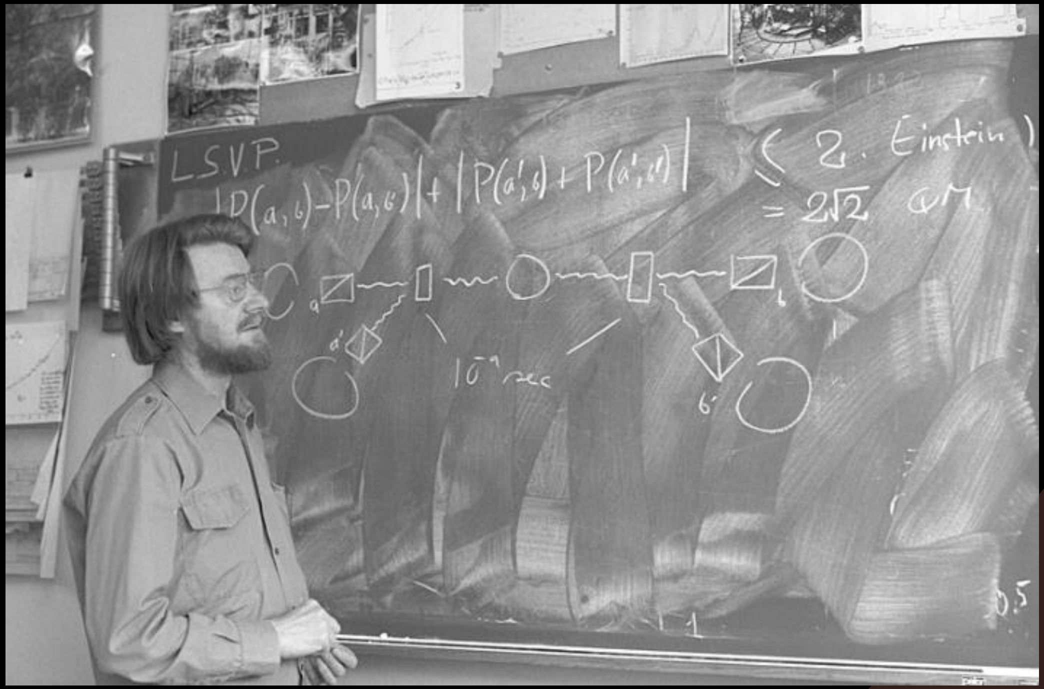
$$= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\vec{b},\lambda)[1 \pm A(\overrightarrow{a'},\lambda) B(\overrightarrow{b'},\lambda)] - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a},\lambda) B(\overrightarrow{b'},\lambda)[1 \pm A(\overrightarrow{a'},\lambda) B(\vec{b},\lambda)]$$

Inoltre essendo $\rho(\lambda) \geq 0$ e normalizzata e che $|A(\vec{a},\lambda)| = 1 = |B(\vec{a},\lambda)|$, abbiamo che:

$$
\begin{aligned}
&\left|C(\vec{a},\vec{b}) - C(\vec{a},\vec{b'})\right| \\
&\leq \int d\lambda\rho(\lambda)\left[1 \pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b'},\lambda)\right] + \int d\lambda\rho(\lambda)\left[1 \pm A(\vec{a'},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\right] \\
&\qquad = 2 \pm \left[C(\vec{a'},\vec{b'}) + C(\vec{a'},\vec{b})\right]
\end{aligned}
$$

Ovvero otteniamo le *diseguaglianze di Bell*:

$$
\boxed{\left|C(\vec{a},\vec{b}) - C(\vec{a},\vec{b'})\right| + \left|C(\vec{a'},\vec{b}) + C(\vec{a'},\vec{b'})\right| \leq 2}
$$



Conflitto con il risultato in MQ

Le diseguaglianze di Bell sono state ricavate da ipotesi che sono al di fuori della meccanica quantistica, come per esempio l'esistenza di variabili nascoste. Partendo dallo stato si singoletto, creato come detto in precedenza, la funzione d'onda è la seguente:

$$|00\rangle = |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle]$$

Dove:

$|+\rangle$: particelle deflesse in una direzione

$|-\rangle$: particelle deflesse in quella opposta

In riferimento ad un apparato Stern-Gerlach orientato lungo un asse arbitrario (per esempio z).

Calcoliamo il correlatore, ma seguendo ora le regole e i postulati della meccanica quantistica:

Le due osservabili sono:

$$A = \vec{a} \cdot \vec{\sigma_1}$$
$$B = \vec{b} \cdot \vec{\sigma}_2$$

Allora il correlatore vale:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \psi | \vec{a} \cdot \vec{\sigma_1} \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma_2} | \psi \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Ponendo $\vec{a} \cdot \vec{b} = cos\theta$ e scegliendo $\vec{a}' = \vec{b}$ e $\vec{b}' = 2(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} - \vec{a}$, si ha $\vec{a}' \cdot \vec{b} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b}' = \cos 2\theta$, $\vec{a'} \cdot \vec{b'} = cos\theta$.

Dalle diseguaglianze di Bell si ha:

$$|\cos \theta - \cos 2\,\theta| + |\cos \theta + 1| \leq 2$$

Ma:

$$|\cos \theta - \cos 2\,\theta| + |\cos \theta + 1| \geq 2\cos \theta - \cos 2\,\theta + 1$$

Cioè vale:

$$2\cos \theta - \cos 2\,\theta \leq 1 \qquad \forall \theta \in (0, \pi/2)$$

Questo però è falso per un qualunque intervallo centrato in $\theta = \pi/3$.

Calcoliamo esplicitamente il correlatore:

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$C(\vec{a},\vec{b}) = \langle\psi|\vec{a}\cdot\vec{\sigma_1}\otimes\vec{b}\cdot\vec{\sigma_2}|\psi\rangle = \langle 00|(\vec{\sigma_1}\cdot\vec{a})\otimes(\vec{\sigma_2}\cdot\vec{b})|00\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}[\langle +|\otimes\langle -| - \langle -|\otimes\langle +|]\,(\vec{\sigma_1}\cdot\vec{a})\otimes(\vec{\sigma_2}\cdot\vec{b})[|+\rangle\otimes|-\rangle - |-\rangle\otimes|+\rangle] =$$

$$= \frac{1}{2}[\langle +|\otimes\langle -| - \langle -|\otimes\langle +|]((\vec{\sigma_1}\cdot\vec{a})|+\rangle\otimes(\vec{\sigma_2}\cdot\vec{b})|-\rangle) - (\vec{\sigma_1}\cdot\vec{a})|-\rangle\otimes(\vec{\sigma_2}\cdot\vec{b})|+\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2}[\langle +|\otimes\langle -| - \langle -|\otimes\langle +|]\{[a_z|+\rangle + (a_x + ia_y)|-\rangle]\,[(b_x - ib_y)|+\rangle - (b_z)|-\rangle] - [-a_z|-\rangle + (a_x - ia_y)\,|+\rangle]$$
$$[(b_x + ib_y)|-\rangle + (b_z)|+\rangle]\} =$$

$$\frac{1}{2}(-a_z b_z - a_x b_x - a_y b_y + ia_y b_x - ia_x b_y - a_z b_z - a_y b_x - a_y b_y - ia_y b_y + ia_x b_y) = -(a_z b_z + a_x b_x + a_y b_y) = -\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Dove abbiamo usato che:

$$\sigma_x|\pm\rangle = |\mp\rangle, \quad \sigma_y|\pm\rangle = \pm i|\mp\rangle \quad \sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$$

ed essendo $\vec{a}\cdot\vec{\sigma_1}$ e $\vec{b}\cdot\vec{\sigma_2}$ operatori scalari allora sono invarianti sotto rotazioni, quindi la scelta dell'asse è irrilevante.

Le diseguaglianze di Bell sono dunque violate dalla meccanica quantistica!

Abbiamo l’incompatibilità tra teorie locali a variabili nascoste e la formulazione standard della meccanica quantistica.

Manca ora uno o più esperimenti che confermino o meno l’esistenza di variabili locali nascoste, sempre in riferimento alla formulazione matematica presentata da Bell.

VERIFICHE SPERIMENTALI

Partendo da due particelle in uno stato Entangled si considerino due direzioni di misura arbitrarie $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si indichi con $P_{\pm\pm}(\vec{a},\vec{b})$ la probabilità di ottenere ± 1 in direzione $\vec{a}$ $e \pm 1$ in direzione $\vec{b}$ per la prima e la seconda particella rispettivamente.

Si può esprimere la correlazione tra misure effettuate sulle particelle come

$$\mathrm{E}(\vec{a},\vec{b}) = P_{++}(\vec{a},\vec{b}) + P_{--}(\vec{a},\vec{b}) - P_{+-}(\vec{a},\vec{b}) - P_{-+}(\vec{a},\vec{b})$$

E dalle disuguaglianze di Bell generalizzate, definito

$$\mathrm{S} = \mathrm{E}(\vec{a},\vec{b}) - \mathrm{E}(\vec{a},\vec{b}') + \mathrm{E}\,(\vec{a}',\vec{b}) + \mathrm{E}(\vec{a}',\vec{b}')$$

Risulta che per una qualunque *teoria locale realista* deve essere soddisfatta la condizione $-2 \leq S \leq 2$ mentre dalle previsioni della M.Q. scegliendo opportunamente $\vec{a}, \vec{a}'$, $\vec{b}$ e $\vec{b}'$ si può ottenere $S = \pm 2\sqrt{2}$

Schema sperimentale originale

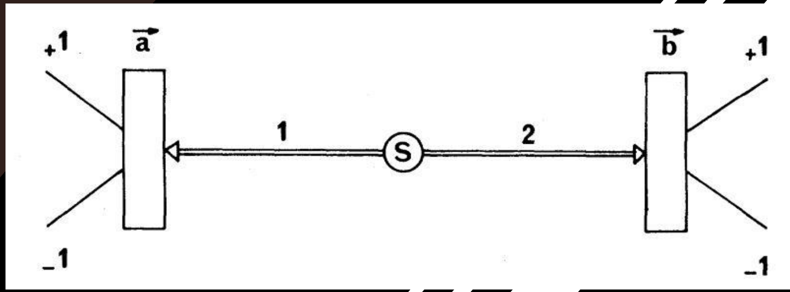
L'esperimento consiste in una sorgente che produce coppie particelle in uno stato non fattorizzabile (Entangled).

Le particelle di ogni coppia vengono separate ed allontanate ad una distanza Δl in modo tale che non sia possibile che una misurazione su di una delle due particelle influenzi la misurazione sull'altra in un intervallo di tempo Δt

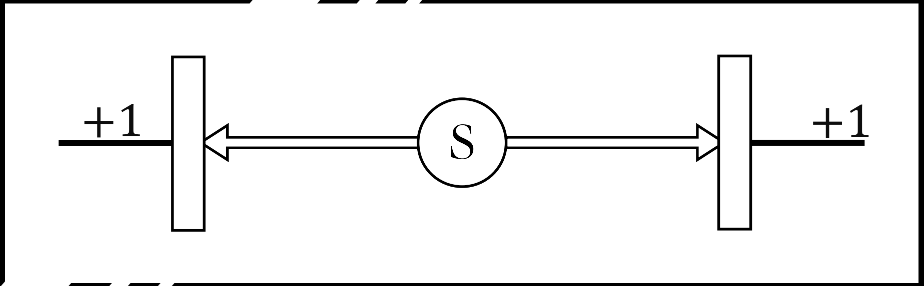
$$\Delta l \gg c \cdot \Delta t$$

In questo modo le misure non possono essere correlate (assumendo una visione classica), dunque misurare in un tempo minore di Δt due osservabili non compatibili uno sulla prima ed uno sulla seconda.

Sfruttando il modello di Bohm-Ahranov si possono usare particelle a spin ½ o fotoni con polarizzazione mutuamente ortogonale, la misura prevede la rilevazione di tutte le coincidenze $P_{\pm\pm}^{Exp}(\vec{a},\vec{b})$



Tentativi precedenti



Tentativi di stabilire sperimentalmente quale delle due posizioni (realista o ortodossa) fosse corretta furono fatti anche prima di Aspect con fotoni o protoni, tuttavia

- nessuno riproduceva abbastanza fedelmente lo schema originale
- Non erano disponibili analizzatori efficienti in grado di lavorare ad alte energie e le misure erano fatte sfruttando l'effetto Compton, ma questo metodo era fortemente criticato dalla comunità scientifica.

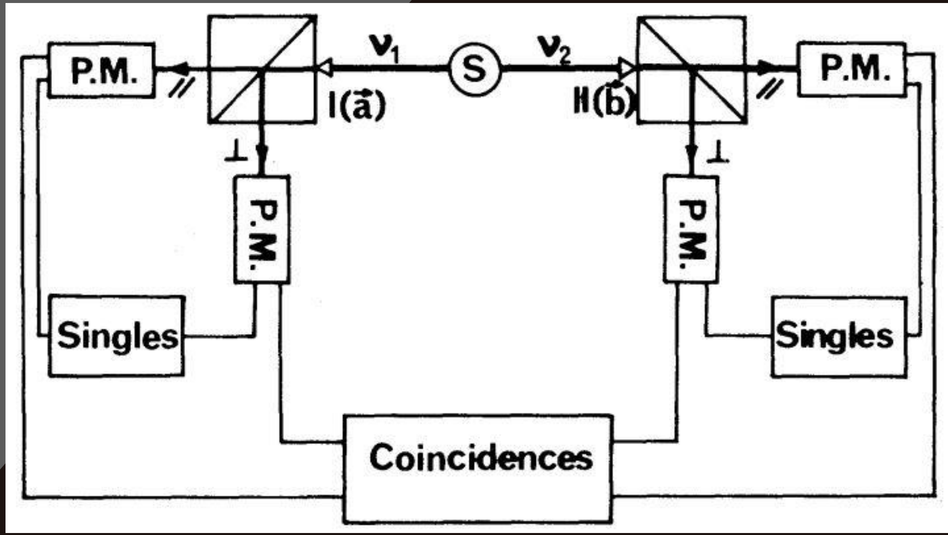
Anche utilizzando fotoni a basse energie gli esperimenti precedenti misuravano soltanto le polarizzazioni parallele alle direzioni $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ottenendo soltanto $P_{++}^{Exp}(\vec{a},\vec{b})$, mentre le altre probabilità risultavano poco attendibili a causa della scarsa efficienza degli apparati di misura.

Si rendevano quindi necessarie altre misurazioni senza polarizzatori ed i risultati venivano estrapolati dal confronto dei dati dei diversi esperimenti

L'esperimento di Aspect

L'esperimento proposto da Alain Aspect prevedeva l'utilizzo di fotoni a bassa energia con polarizzazioni mutuamente ortogonali, ma al posto di semplici polarizzatori utilizzò polarizzatori dicotomici che permettevano il passaggio alla radiazione incidente con una determinata polarizzazione e riflettevano la componente ortogonale. I fotoni venivano poi rilevati da fotomoltiplicatori (P.M.)

Analizzando le coincidenze e gli eventi singoli riuscì a determinare con precisione tutti e quattro le probabilità $P_{\pm\pm}^{Exp}(\vec{a},\vec{b})$ come numero di occorrenze rilevate sul totale in una singola volta, ottenendo il coefficiente di correlazione



$$E^{Exp}(\vec{a},\vec{b}) = \frac{P_{++}^{Exp}(\vec{a},\vec{b}) + P_{--}^{Exp}(\vec{a},\vec{b}) - P_{+-}^{Exp}(\vec{a},\vec{b}) - P_{-+}^{Exp}(\vec{a},\vec{b})}{P_{++}^{Exp}(\vec{a},\vec{b}) + P_{--}^{Exp}(\vec{a},\vec{b}) + P_{+-}^{Exp}(\vec{a},\vec{b}) + P_{-+}^{Exp}(\vec{a},\vec{b})}$$

Ripetendo tale esperimento per quattro diverse orientazioni dei polarizzatori dicotomici si può verificare direttamente che la disuguaglianza $|S| \leq 2$ è violata.

L'uguaglianza tra $E^{Exp}(\vec{a},\vec{b})$ ed $E(\vec{a},\vec{b})$ è un'assunzione ragionevole dovuta alla simmetria del sistema che equivale a considerare le particelle misurate come insieme rappresentativo dell'intera radiazione emessa.

Furono fatte diverse verifiche sperimentali sulle prestazioni del setup sperimentale per garantirne l'efficienza che evidenziarono una incertezza abbastanza piccola da non compromettere la validità dei risultati.

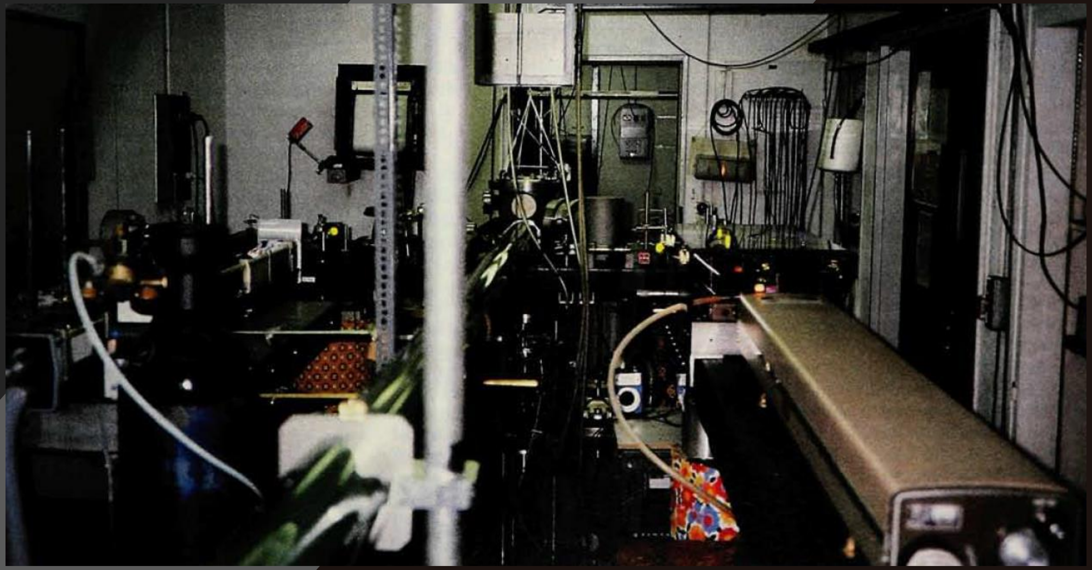


Foto del setup sperimentale originale

Risultati

Il risultato ottenuto dall'esperimento è la confutazione delle teorie realiste locali con la violazione della disuguaglianza di Bell generalizzata, infatti risulta

$$S^{Exp} = 2{,}697 \pm 0{,}015$$

E la previsione della M.Q. nelle condizioni sperimentali usate è

$$S^{MQ} = 2{,}70 \pm 0{,}05$$

In perfetto accordo con il risultato sperimentale

Inoltre venne mappata la correlazione della polarizzazione dei fotoni in funzione dell'angolo tra le direzioni $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che secondo la M.Q. segue la legge

$$E(\vec{a},\vec{b}) = F\,\frac{(T_1^{\parallel} - T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} - T_2^{\perp})}{(T_1^{\parallel} + T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} + T_2^{\perp})}\cos\left(2\theta(\vec{a},\vec{b})\right)$$

I $T_{1,2}^{\parallel,\perp}$ sono i coefficienti di trasmissione dei polarizzatori e F è un coefficiente correttivo per tener conto dell'angolo solido di misura

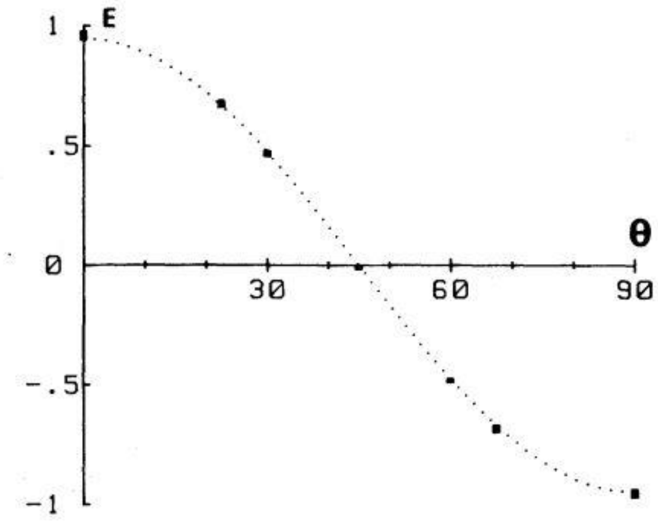


FIG. 3. Correlation of polarizations as a function of the relative angle of the polarimeters. The indicated errors are ±2 standard deviations. The dotted curve is not a fit to the data, but quantum mechanical predictions for the actual experiment. For ideal polarizers, the curve would reach the values ±1.

COMUNICAZIONE E INFORMAZIONE

Un sistema quantistico contiene un determinato grado di informazione, tuttavia essa resta inaccessibile fino al momento della misura.

La misura tuttavia permette l'estrazione di parte dell'informazione a discapito del resto dell'informazione che viene persa irrimediabilmente, la funzione d'onda infatti collassa su un determinato stato molto più semplice.

Sulla base di questa considerazione uno stato $|\psi\rangle$ non può essere determinato esattamente se sconosciuto a priori, e dunque non può essere neanche clonato

Inoltre un sistema Entangled per due osservatori indipendenti non è in grado di permettere la comunicazione di informazioni tra i due osservatori, risultando compatibile con la relatività ristretta.

Teorema di non comunicazione quantistica

Dati due osservatori A e B ed un sistema su uno spazio di Hilbert $H = H_A \otimes H_B$ un qualsiasi operatore densità su H ha la forma (per semplicità si considerino finito dimensionali per non incorrere in problemi di divergenza)

$$\rho = \sum_i T_i \otimes S_i \text{ con } T_i \text{ e } S_i \text{ rispettivamente operatori di } H_A \; e \; H_B$$

Una generica misurazione sul sistema A prende la forma

$$P(\rho) = \sum_k \left(V_k \otimes \hat{1}_{H_B}\right)^* \rho \left(V_k \otimes \hat{1}_{H_B}\right) \text{ con } V_k \text{ matrici di Kraus tali che } \sum_k V_k V_k^* = \hat{1}_{H_A}$$

Dopo la misura da parte dell'osservatore A il sistema B collassa ed è dato dalla traccia parziale del stato generale rispetto al sistema di A, risulta tuttavia che

$$tr_{H_A}\left(P(\rho)\right) = tr_{H_A}(\rho)$$

Da ciò discende che, statisticamente, B non può dire la differenza tra ciò che A ha fatto e una misurazione casuale.
Non è quindi possibile la comunicazione di informazioni tramite sistemi Entangled.

Dimostrazione

$$tr_{H_A}(P(\rho)) = tr_{H_A}\left(\sum\nolimits_k (V_k \otimes \hat{1}_{H_B})^* \rho (V_k \otimes \hat{1}_{H_B})\right)$$

$$= tr_{H_A}\left(\sum_k \sum_i V_k^* T_i V_k \otimes S_i\right)$$ Ogni operatore agisce solo sul suo spazio di Hilbert

$$= \sum_i \sum_k tr(V_k^* T_i V_k) S_i$$ La traccia è fatta solo rispetto allo spazio H_A

$$= \sum_i \sum_k tr(T_i V_k V_k^*) S_i$$ Proprietà della traccia

$$= \sum_i tr\left(T_i \sum_k V_k V_k^*\right) S_i$$ T_i non dipende da k

$$= \sum\nolimits_i tr(T_i) S_i$$ Proprietà $\sum\nolimits_k V_k V_k^* = \hat{1}_{H_A}$

$$= tr_{H_A}(\rho)$$

Teorema di non clonazione quantistica

Considerando un sistema $|\psi\rangle = |E\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\eta_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\eta_n\rangle$

Dove $|E\rangle$ è lo stato dell'ambiente, $|\phi\rangle$ è lo stato da copiare e gli $|\eta_i\rangle$ con i = 1 ... n sono gli stati iniziali degli n sistemi in cui si dovrebbe clonare $|\phi\rangle$.

Clonare un sistema equivale a trovare un operatore unitario U tale che

$$U|E\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\eta_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\eta_n\rangle = |E_\phi\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi\rangle$$

Ma per semplicità si considerino solo due stati iniziali $|\phi\rangle$ $|\chi\rangle$, dall'unitarietà di U discende la conservazione del prodotto scalare quindi

$$|\langle\phi|\chi\rangle| = |\langle E_\phi|E_\chi\rangle||\langle\phi|\chi\rangle|^n$$

Ma dalla normalizzazione degli stati si ha che $0 \leq |\langle\phi|\chi\rangle| \leq 1$ ed analogamente $0 \leq |\langle E_\phi|E_\chi\rangle| \leq 1$ per cui l'uguaglianza nella relazione precedente può essere verificata solo se $|\langle\phi|\chi\rangle| = 0$

Pertanto, un singolo operatore U universale non può clonare uno stato quantistico generale. Questo dunque impedisce lo scambio di informazioni per mezzo della correlazione quantistica.

CONCLUSIONE

Come abbiamo potuto verificare, le diseguaglianze di Bell sono violate dagli esperimenti di correlazione. Questo suggerisce che la meccanica quantistica non può avere variabili locali nascoste. Aver escluso la completezza della meccanica quantistica per salvaguardare l'ipotesi di realtà e località tanto vicine ad Einstein, Podolsky e Rosen ha portato una violazione del principio di località.

Poiché gli esperimenti discussi portano ad escludere l'incompletezza della meccanica quantistica, restano aperte due possibilità. Una delle due ipotesi, apparentemente ragionevoli, prese in considerazione nell'articolo EPR deve cadere:

1. <u>ABBANDONO DEL PRINCIPIO DI LOCALITA'</u>: l'impossibilità di teorie a variabili nascoste locali non esclude l'esistenza di possibili teorie non locali (dette a variabili nascoste globali). Una descrizione di questo tipo però comporterebbe ulteriori complicazioni incompatibili con la relatività ristretta.

2. <u>ABBANDONO DEL PRINCIPIO DI REALTA'</u>: la funzione d'onda non è più una proprietà oggettiva del sistema fisico in questione ma la si deve interpretare come l'oggetto matematico che raccoglie tutte le informazioni che noi possiamo avere di un sistema fisico. Di conseguenza il principio di località è salvo grazie al fatto che un cambiamento anche istantaneo della funzione d'onda non comporta un cambiamento della realtà fisica, ma solamente della conoscenza che noi abbiamo di esso e non implica dunque una trasmissione istantanea di informazione, che in ogni caso non sarebbe possibile grazie al teorema di non comunicazione.

Bibliografia

1. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete, Phys. Rev. 47 (1935), p.777.
2. J. Bell, On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, Physics 1 (1964), p. 195.
3. E. Onofri, C. Destri, Istituzioni di Fisica Teorica, La Nuova Italia Scientifica, Roma 1996.
4. A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities, Phys. Rev. Lett. 49 (1982), p. 91.
5. R. Nicoletti, Le diseguaglianze di Bell, Università degli studi di Padova Facoltà di scienze Dipartimento di Fisica "G. Galilei".
6. C. Passoni, I fondamenti della meccanica quantistica e il paradosso EPR, Università degli studi di Milano-Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali.
7. Teorema di non comunicazione, Wikipedia: [https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_non-comunicazione#:~:text=In%20fisica%2C%20il%20teorema%20di,con%20il%20primo%20in%20modo]
8. Teorema di non clonazione, Wikipedia: [https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_no-cloning_quantistico#:~:text=Il%20teorema%20di%20non%20clonazione,stato%20quantistico%20sconosciuto%20a%20priori.]