

Inquietanti azioni a distanza e rassicuranti impossibilità di reazioni

Gennari Guglielmo, Pedroni Riccardo

10 marzo 2023

1 Abstract

Si può a ragione asserire che il singolo articolo di Einstein Podolsky e Rosen (EPR) del 1935 abbia scaturito un profondo e proficuo dialogo tra fisica e filosofia. In questo testo di introduzione si tentano di mostrare le ragioni filosofiche (*"Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?"*) alla base del problema e di dimostrare le implicazioni fisiche ed epistemologiche della formulazione e della tentata risoluzione dello stesso. In particolare, tramite la sintesi e l'analisi dei principali contributi sull'argomento (Bohm Aharonov, Wigner, Bell), concludendo con gli esperimenti reali di Aspect si giungerà ad una possibile e naturale soluzione, dalle quantomeno bizzarre conseguenze.

2 Il Paradosso EPR

2.1 Introduzione

Nell'articolo del 1935, Einstein Podolsky e Rosen definiscono, presupponendo ragionevolmente la località, i criteri attraverso i quali una teoria fisica possa essere considerata completa:

- **Principio di Realismo:** Se, senza disturbare in alcun modo il sistema, possiamo predire con certezza il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a tale grandezza fisica.
- **Principio di Completezza:** Una teoria fisica è completa se ogni elemento della realtà fisica ha una controparte all'interno della teoria.

Si noti che il primo principio non si eleva ad una definizione esatta ed inequivocabile di realtà, bensì fornisce una condizione intuitiva sufficiente affinché ad una quantità fisica corrisponda un elemento di realtà fisica. Conseguenza banale di ciò è che dimostrando che vale il principio si deduce immediatamente l'esistenza reale della grandezza in questione.



Figura 1: Da sinistra a destra, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen.

2.2 L'argomentazione

Consideriamo la funzione d'onda $\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}p_0x}$: è un'autofunzione del momento con autovalore p_0 , quindi la corrispondente misura darà sempre lo stesso risultato. Al contrario per x :

$$P(a < x < b) = \int_a^b \psi^* \psi dx = \int_a^b dx = b - a$$

Ossia tutti i valori di x sono equiprobabili. Questo fenomeno è ben descritto dal Principio di indeterminazione di Heisenberg: siccome l'indeterminazione (radice quadrata della varianza) su P è nulla, quella su X è infinita.

Nei termini da noi definiti, questo significa che P ha realtà fisica (in quanto conosciamo il suo valore senza disturbare il sistema) mentre X no. La MQ non si mostra in grado di prevedere con assoluta certezza e senza disturbare il sistema (ricordiamo il **Postulato del Collasso della Funzione d'Onda**) il valore di impulso e posizione (in generale quantità descritte da operatori non commutanti), il che porta a due possibili conclusioni:

1. La MQ è una teoria fisica **incompleta**;
2. Operatori non commutanti **non possono avere realtà fisica simultanea**.

Supponiamo ora che la teoria sia completa e consideriamo un sistema composto di due particelle descritto dalla seguente funzione d'onda:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp \quad (1)$$

Se scriviamo la (1) nella base dell'operatore impulso ($P = (h/2\pi i)\delta/\delta x_1$) della prima particella si ha

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp \quad (2)$$

dove le $u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1}$ sono le autofunzioni dell'operatore impulso della prima particella corrispondenti all'autovalore p e le $\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}$ sono da intendersi come i coefficienti dell'espansione.

Si nota che le $\psi_p(x_2)$ coincidono con le autofunzioni dell'operatore momento della seconda particella relative all'autovalore $-p$.

Analogamente, sviluppando la (1) nella base dell'operatore posizione (X) della prima particella si ha:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx \quad (3)$$

dove in questo caso le $v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$ sono le autofunzioni dell'operatore posizione della prima particella corrispondenti all'autovalore x e le $\varphi_x(x_2) = \delta(x - x_2 + x_0)$ sono da intendersi come i coefficienti dell'espansione.

Si nota che le $\varphi_x(x_2)$ coincidono con le autofunzioni dell'operatore posizione della seconda particella relative all'autovalore $x + x_0$.

Supponiamo ora che le particelle vengano allontanate ad una distanza tale da non permettere alcuna interazione tra di esse. Appare evidente che, misurando o la posizione o l'impulso della prima particella, si ottengono informazioni su posizione e momento della seconda senza in alcun modo disturbare il sistema.

Per il precedentemente enunciato **principio di realismo** si è dunque portati a considerare rispettivamente nel primo o secondo caso, la quantità P o X come elemento di realtà. Ma entrambe le funzioni d'onda si riferiscono alla stessa situazione fisica, conseguentemente grandezze fisiche corrispondenti ad operatori incompatibili hanno realtà simultanea.

Si potrebbe obiettare che la realtà simultanea si verifichi esclusivamente se è possibile una misura simultanea. Nel precedente esempio, siccome o una o l'altra ma non entrambe simultaneamente le quantità P e X possono essere predette/misurate esse non sarebbero simultaneamente reali. Questo comporterebbe che la realtà di P e X dipende dal processo di misura effettuato sul primo sistema, che non disturba in alcun modo il secondo. Nessuna buona definizione di realtà implicherebbe un tale risultato.

2.3 Le conseguenze

Supponendo che la MQ sia una teoria completa (negando la prima delle possibili conclusioni) si arriva a negare anche la seconda, conseguentemente per il principio del terzo escluso la MQ deve essere una teoria incompleta.

Si noti dunque che il determinismo che tanto stava caro ad Einstein (*Dio non gioca a dadi*) risulta preservato, e la struttura casuale che emerge in meccanica quantistica è dovuta esclusivamente alla incompletezza della teoria.

2.4 Le possibili obiezioni

Occorre notare, come precedentemente dichiarato, che l'argomentazione EPR "stessa" il principio di località. Se dovesse emergere invece che i due sistemi continuino ad interagire qualunque sia la distanza reciproca, l'intera dimostrazione verrebbe invalidata.

Ancora, potrebbe essere possibile che la MQ abbia validità locale e che ad una certa distanza si verifichi un **breakdown** della teoria, con conseguente alterazione della funzione d'onda.

Apparirà abbastanza evidente ora che, affinché la discussione possa rivelarsi fruttuosa è necessario "rimettere i piedi per terra" e tramutare la discussione filosofica in argomenti fisici verificabili con esperimenti (reali) in laboratorio. In questa direzione, furono fondamentali gli articoli che seguirono nei decenni successivi.

3 La formulazione di Bohm del paradosso EPR

La questione del Paradosso EPR rimase in sospenso, per ovvie ragioni, durante la Seconda Guerra Mondiale. Nel 1957 **Bohm** e **Aharonov** pubblicarono il seguente articolo: "*Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*". Questi osservarono come il paradosso EPR emerge (sottilmente) nel momento in cui si considerano due osservabili non compatibili di 2 sistemi in uno stato "allacciato". Ad esempio, considerando lo stato di singoletto

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \quad (4)$$

è evidente che le particelle si trovino in uno stato *entangled* in quanto lo stato della seconda particella è dedotto inequivocabilmente da una misura sulla prima.

3.1 Correlazione tra misure di spin

Prima di entrare nel vivo dell'articolo, conviene mostrare alcuni risultati.

Innanzitutto, quando si tratta di osservabili non compatibili, può presentarsi il fenomeno della **correlazione tra misure**. Questo perchè non è possibile trovare una base di autovettori che li diagonalizzi entrambi, e il collasso della funzione d'onda dovuto ad una misura in generale altera anche i possibili valori della seconda osservabile. Ciò non succede per osservabili compatibili, in quanto il collasso d'onda "fissa" il numero quantico associato all'osservabile considerata senza perturbare le altre grandezze. Matematicamente, si ha correlazione quando:

$$\langle AB \rangle \neq \langle A \rangle \langle B \rangle$$

Ossia il valor medio del prodotto è diverso dal prodotto dei valor medi.

Questo è quello che succede ad esempio per le componenti del momento angolare di spin S_a e S_b se queste non sono ortogonali.

Supponiamo di misurare $S_a = S_z = \hbar/2$: allora l'autofunzione associata allo spin collassa sullo stato $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre per valutare i possibili risultati di una successiva misura lungo S_b bisogna diagonalizzare

$$S_b = \vec{b} \cdot \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha e^{-i\phi} \\ \sin \alpha e^{-i\phi} & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Dove α è l'angolo di abbattimento mentre ψ è l'angolo piano.

Da qui si trovano come autovalori $\lambda = \pm \hbar/2$, con relativi autovettori $|\psi_{\pm}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 e^{-i\phi/2} \\ \sin \alpha/2 e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$ e

$|\psi_{-}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \alpha/2 e^{-i\phi/2} \\ \cos \alpha/2 e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$, da cui $P(S_b = \pm \hbar/2) = |\langle \psi_{\pm} | \psi_0 \rangle|^2$ con $\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quindi si ha

$$P(+)=\cos ^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$P(-)=\sin ^2 \frac{\alpha}{2}$$

Si noti che l'angolo piano non influisce in alcun modo sulla probabilità, ciò è dovuto alla simmetria per rotazione del sistema.

Se invece avessimo misurato $S_z = -\hbar/2$, lo stato sarebbe collassato su $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e le due probabilità si sarebbero invertite. Dunque, a partire da una generica autofunzione $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $|a|^2 + |b|^2 = 1$, si ha che:

$$\langle S_a \rangle = \frac{\hbar}{2}(|a|^2 - |b|^2)$$

$$\langle S_b \rangle = \frac{\hbar}{2}(|a|^2(\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2})) - |b|^2(\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2})))$$

Mentre

$$\langle S_a S_b \rangle = \frac{\hbar}{4}(|a|^2(\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2})) - |b|^2(-\sin^2(\frac{\alpha}{2}) + \cos^2(\frac{\alpha}{2}))) \neq \langle S_a \rangle \langle S_b \rangle$$

L'unico caso in cui vale l'uguaglianza è quello in cui, come avevamo anticipato, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, per cui $\langle S_b \rangle = 0$. Intuitivamente, questo accade perché l'angolo compreso tra i due possibili versi di \vec{a} , corrispondenti ai due possibili versi dello spin, è lo stesso, perciò i due possibili risultati della seconda misura sono equiprobabili. Per un piccolo angolo α , invece, ci aspetteremmo più probabile un segno dello spin concorde per le due componenti.

Si sarebbero potuti ottenere i medesimi risultati più facilmente sfruttando l'operatore di rotazione associato al momento angolare di spin $U(\hat{n}, \alpha) = e^{i\alpha \frac{\vec{S} \cdot \hat{n}}{\hbar}}$. Questo, applicato ad uno stato, lo ruota di α , quindi deve corrispondere alla matrice di cambiamento di base che diagonalizza S_b , e in effetti è così. Infatti $D = V^{-1}S_b V$, dove D è l'operatore diagonalizzato mentre

$$V = (|\psi_{+}\rangle, |\psi_{-}\rangle) = \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 e^{-i\phi/2} & -\sin \alpha/2 e^{-i\phi/2} \\ \sin \alpha/2 e^{i\phi/2} & \cos \alpha/2 e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

Invece

$$U(\hat{n}, \alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} I(2) + i \sin \frac{\alpha}{2} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})$$

Dove $I(d)$ indica la matrice identità di dimensione d per d .

C'è corrispondenza tra ϕ e \hat{n} , ad esempio se $\phi = 0$ allora $\hat{n} = -\hat{y}$, perciò nell'espressione di V gli esponenziali sono uguali a 1 mentre nell'espressione di U si ha che $\hat{n} \cdot \vec{\sigma} = -\sigma_2$ e perciò, esplicitando le matrici, si trova che $U = V$.

Consideriamo ora il caso del singoletto: la prima particella ha la stessa probabilità di misurare $S_a = \pm \frac{\hbar}{2}$, qualunque sia \vec{a} , poichè i coefficienti davanti agli stati $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ sono uguali e poichè si ha simmetria centrale. Una volta effettuata la prima misura, lo spin dell'elettrone corrispondente collassa lungo \vec{a} con uno dei due autovalori, mentre nell'altro elettrone lo spin collassa sulla medesima direzione, ma con autovalore opposto. A questo punto si ha una situazione simile a prima: lo spin del secondo elettrone ha già uno stato definito, perciò una successiva misura lungo S_b ha probabilità dipenderà dall'angolo compreso tra \vec{a} e \vec{b} . Supponiamo ad esempio di misurare $+\frac{\hbar}{2}$ nel primo elettrone: allora il secondo avrà stato $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lungo la medesima direzione.

Come visto prima, la probabilità di misurare successivamente $+\frac{\hbar}{2}$ lungo \vec{b} è data da $\sin^2(\frac{\alpha}{2})$. La probabilità della combinazione delle due misure sarà quindi $P(+, +, \vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \sin^2(\frac{\alpha}{2})$.

Calcoliamo infine i valori medi e la correlazione.

Per quanto riguarda i primi, abbiamo che per ogni direzione le due misure possibili sono equiprobabili ed hanno segno opposto perciò $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$, dove con A e B indichiamo rispettivamente la misura lungo \vec{a} sulla prima particella e quella lungo \vec{b} sulla seconda.

invece, per quanto riguarda $\langle AB \rangle$, abbiamo prima $A = \pm \frac{\hbar}{2}$ con stesso probabilità $\frac{1}{2}$, mentre per la seconda bisogna scindere i casi:

1. Caso "++": la seconda misura ha probabilità $\sin^2(\frac{\alpha}{2})$ di risultare positiva, in tal caso la misura pesata è $\frac{\hbar^2}{8} \sin^2(\frac{\alpha}{2})$.
2. Caso "+-": la seconda misura ha probabilità $\cos^2(\frac{\alpha}{2})$ di risultare negativa, in tal caso abbiamo $-\frac{\hbar^2}{8} \cos^2(\frac{\alpha}{2})$.
3. Caso "-+": la seconda misura ha probabilità $\cos^2(\alpha)$ di risultare positiva, in tal caso viene $-\frac{\hbar^2}{8} \cos^2(\frac{\alpha}{2})$.
4. Caso "--": la seconda misura ha probabilità $\sin^2(\frac{\alpha}{2})$ di risultare positiva, in tal caso viene $+\frac{\hbar^2}{8} \sin^2(\frac{\alpha}{2})$.

Sommando quindi le varie misure pesate abbiamo

$$\langle AB \rangle = \frac{\hbar^2}{4} (\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2})) = -\frac{\hbar^2}{4} \cos(\alpha)$$

3.2 La nuova formulazione del paradosso

Ora che siamo familiari con la correlazione di spin in un singoletto, proseguiamo con l'articolo di Bohm e Aharanov.

Come abbiamo appena visto, il singoletto è un esempio di misure fatte su due sistemi differenti ma che sono comunque correlate (lo stato è infatti entangled). Per di più, essendo lo spettro a soli due elementi, è un caso molto più semplice rispetto alla funzione d'onda ad hoc che Einstein, Podolsky e Rosen avevano escogitato.

Il paradosso può quindi essere semplificato nel seguente modo.

Consideriamo due elettroni in stato di singoletto che vengono emessi da una qualche sorgente e allontanati. Il primo viene osservato da Alice, il secondo da Bob. Alice misura lo spin lungo una certa direzione \vec{a} , ottenendo $A = \pm \frac{\hbar}{2}$. Se Bob misura lo spin lungo la medesima direzione, ha allora la probabilità del 100% di misurare $B = -A$. Se invece Alice misura lungo una diversa direzione \vec{b} , Bob avrà comunque la probabilità di misurare $B = -A$ lungo la stessa. In entrambi i casi, la misura di Alice definisce univocamente quella di Bob. Se vale il Principio di Località, i due sistemi non sono più interagenti. Questo significa, nei termini definiti da Einstein, che sia S_a che S_b del secondo elettrone sono elementi della realtà fisica, in quanto possono essere misurati senza disturbare il sistema. Da qui segue, come nell'articolo originale, la contraddizione.

Bohm e Aharanov furono i primi a sottolineare come il paradosso sia diretta conseguenza del Principio di Località, assunto come ovvio da Einstein. Se si rifiuta la località (il che è un passo tutt'altro che banale), non si arriva ad alcuna contraddizione in quanto si sta semplicemente effettuando una misura sul sistema perturbandolo e dunque, viene negata la condizione di appartenenza alla realtà fisica. Tuttavia, ad essere paradossale sarebbe l'azione istantanea a distanza che la misura di Alice applica sullo stato dell'elettrone di Bob, in contraddizione con la Relatività Ristretta, perciò il problema resta aperto.

3.3 L'ipotesi del breakdown

Come precedentemente annunciato, una possibile soluzione del paradosso è quella di ipotizzare un breakdown della MQ ovvero stabilire un limite di distanze oltre le quali la teoria perde di validità.

Per poter verificare questa ipotesi, serve considerare distanze sufficientemente grandi da riuscire a valutare se le particelle agiscono a "distanze di tipo spazio" o se si ha una rottura della MQ.

Realizzare un esperimento in cui si verifica una tale condizione è alquanto difficile, per cui *Bohm e Aharanov* ne proposero un'alternativa che coinvolge l'uso di **fotoni entangled**.

3.4 Spin di un fotone

Secondo la **Teoria Quantistica dei Campi**, il fotone è il **mediatore** dell'interazione elettromagnetica. Per questo è una particella bosonica, ossia ha spin intero. Più precisamente ha come numero quantico di spin 1, da cui il numero quantico magnetico di spin può avere, in linea di principio, tre valori: 1, 0 e -1 . In realtà, il numero quantico 0 è inaccessibile, questo perchè ciascun valore di S_z corrisponde ad un certo stato di polarizzazione e la luce, secondo la Relatività e l'Elettromagnetismo, ha solo i 2 gradi di libertà per la polarizzazione, entrambe perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda.

I due stati di polarizzazione del fotone corrispondono ai due versi della polarizzazione circolare. Affinchè la polarizzazione lineare possa ancora essere rappresentata tramite gli stati $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, serve

che gli autovettori di S_z siano $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$, ossia gli stati di polarizzazione circolare sono dati dalle due combinazioni degli stati di polarizzazione lineare che sfasano di $\pm\frac{\pi}{2}$ le due componenti.

Se anzichè S_z consideriamo la componente di \vec{S} che ha come autovalori le due polarizzazioni lineari, allora la somma dei momenti angolari di spin per due fotoni ha come autostati risultanti, in totale analogia con il caso degli elettroni, i seguenti:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, V\rangle + |V, H\rangle)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, V\rangle - |V, H\rangle)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, H\rangle + |V, V\rangle)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, H\rangle - |V, V\rangle)$$

Dove, anzichè gli stati *up* e *down*, abbiamo i due stati di polarizzazione *horizontal* $|H\rangle$ e *vertical* $|V\rangle$. Questa volta, avendo un bosone, il Principio di Pauli non discrimina alcuno stato, perciò abbiamo ben 4 stati correlati che possono essere sfruttati. Inoltre, è molto più facile, a livello sperimentale, realizzare una sorgente di fotoni entangled piuttosto che elettroni.

Per quanto concerne la loro correlazione, si noti che stavolta l'operatore di rotazione è:

$$U(\vec{n}, \alpha) = e^{i\alpha(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})}$$

L'unica differenza con quello associato agli elettroni è che α non è più divisa per due. Ma allora, se si prende $\vec{n} = -\vec{y}$, si ottiene una matrice analoga all'altra:

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Poi, a seconda dello stato entangled che si considera, anche le varie probabilità si calcolano in maniera analoga.

NB: La schematizzazione degli autostati dei fotoni tramite due componenti è in linea di principio sbagliata. Se ad esempio provassimo a calcolare le probabilità tramite diagonalizzazione, troveremmo gli stessi risultati degli elettroni, diversi da quelli dei fotoni (infatti la struttura dello spazio di spin di quest'ultimi è a 3 componenti). Anche l'operatore di spin ha una struttura leggermente diversa, in quanto le matrici di Pauli vanno riadattate come matrici 3x3. Tuttavia questo metodo, che sfrutta l'analoga struttura dell'operatore di rotazione, permette di risparmiare i conti recuperando quanto già conosciamo per gli elettroni.

3.5 Il primo esperimento sul paradosso EPR

A seconda che si abbiano fotoni con polarizzazione parallela o ortogonale, è possibile verificare l'ipotesi del breakdown in maniera analoga al caso dell'elettrone, andando a verificare se si mantengono le

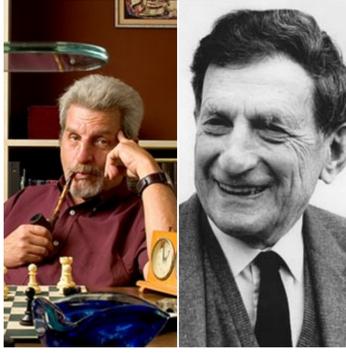


Figura 2: Da sinistra a destra, Yakir Aharonov e David Bohm.

correlazioni previste dalla MQ.

Se ad esempio consideriamo uno stato $|\Psi\rangle$, ossia a spin perpendicolari, e si assegna come risultati delle misure $+1$ se si misura $|H\rangle$ e -1 se si misura $|V\rangle$, allora la correlazione risulta essere

$$\langle AB \rangle = -\cos 2\alpha$$

Infatti $\frac{\hbar}{2} \rightarrow 1$ e $\frac{\alpha}{2} \rightarrow \alpha$.

Invece la probabilità diventa:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\alpha$$

Dove abbiamo usato la formule di bisezione per il seno.

Se invece consideriamo uno stato $|\Phi\rangle$, ossia a spin paralleli, allora le probabilità relative alla seconda misura si invertono, ossia $\cos \alpha \leftrightarrow \sin \alpha$, perciò:

$$\langle AB \rangle = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\alpha$$

Bohm e Aharonov realizzarono dunque un esperimento in cui si emettono coppie di fotoni con stato entangled ben definito (fu svolto sia con polarizzazione parallela che nel caso di polarizzazione ortogonale) e si sfrutta l'effetto Compton per verificare se effettivamente lo stato entangled si conservi anche in scala macroscopica. Il risultato confermò tale condizione, scartando dunque l'ipotesi di breakdown.

4 La disuguaglianza di Bell

4.1 Introduzione

Avendo brevemente mostrato l'impossibilità di considerare vera un'ipotesi di breakdown, rimane da analizzare l'idea "EPRiana" che la MQ possa non essere una teoria completa e debba essere arricchita con variabili aggiuntive che ne ripristinerebbero il carattere locale e causale. L'idea è almeno degna di considerazione (la ha pensata Einstein): tenendo a mente la formulazione di *Bohm e Aharonov* si ha che lo stato di spin della seconda particella è determinato da una misura della stessa componente di spin sulla prima particella, perciò la località è preservata solo se si ipotizza che ogni misura di spin sulla seconda particella sia predeterminata. Dato che la funzione d'onda iniziale della MQ non determina il risultato della misura individuale, la predeterminazione implica la possibilità di una più completa specificazione dello stato.

4.2 Formulazione

Supponiamo che questa più completa descrizione sia realizzata dal significato del parametro quanto più generale possibile λ (per facilità di notazione lo scriviamo come se fosse un singolo parametro continuo).

Detti $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} (:= A)$ e $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} (:= B)$ gli spin della prima e della seconda particella, si ha che le misure delle rispettive quantità devono essere determinate da λ e \vec{a}, \vec{b} . L'assunzione fondamentale è che il risultato della misura dello spin della seconda, prima particella non dipende dall'orientazione di spin misurata \vec{a}, \vec{b} della prima, seconda particella. Detta $\rho(\lambda)$ la distribuzione di probabilità di λ allora il valore di aspettazione del prodotto delle due componenti $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}, \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ è

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (5)$$

Essendo $\rho(\lambda)$ una funzione normalizzata e avendo banalmente $A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$ si ha che $P(\vec{a}, \vec{b})$ non può essere minore di -1 .

In particolare può raggiungere -1 per $\vec{a} = \vec{b}$ solo se $A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{b}, \lambda)$ ad eccezione di un insieme di punti di zero probabilità. Allora possiamo riscrivere la 5 come

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \quad (6)$$

Introducendo un'altro versore \vec{c} si ha che $P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1]$ utilizzando che $A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$ si ottiene

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \quad (7)$$

E, riconoscendo il secondo termine a destra come $P(\vec{b}, \vec{c})$ si ottiene finalmente

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \quad (8)$$

che è la nota disuguaglianza di Bell.

Nonostante noi ci concentreremo su violazioni sperimentali si può facilmente mostrare come essa sia incompatibile con le predizioni della meccanica quantistica (ciò che EPR volevano mostrare è che la meccanica quantistica è una teoria incompleta non una teoria sbagliata!!).

Il facile argomento è il seguente: consideriamo i versori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tutti complanari con \vec{c} che forma un angolo di 45 gradi sia con \vec{a} che con \vec{b} . Allora si ha $P(\vec{a}, \vec{b})=0, P(\vec{a}, \vec{c}) = P(\vec{b}, \vec{c}) = -0.707$ che è palesemente inconsistente con la disuguaglianza di Bell.

In generale, è facile mostrare che la Meccanica quantistica è incompatibile con una struttura assiomatica classica della probabilità. Abbiamo già dimostrato che la probabilità che due misure di spin di due particelle lungo due orientazioni \vec{a}, \vec{b} diano entrambe $+$ vale $\frac{1}{2} \sin^2(\frac{\alpha}{2})$ dove α è l'angolo compreso tra le due direzioni. Consideriamo ora tre direzioni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ad angoli rispettivamente $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ed indichiamo con A,B,C l'evento che corrisponde ad una misura $+$ dello spin della prima particella lungo le tre rispettive direzioni e A',B',C' gli eventi medesimi relativi alla seconda particella. Considerando due particelle in stato di singoletto si ha $P(A \ \& \ B') = P(B \ \& \ C') = P(C \ \& \ A') = \frac{3}{8}$ che equivale a scrivere $P(A \ \& \ \neg B) = P(B \ \& \ \neg C) = P(C \ \& \ \neg A) = \frac{3}{8}$. Ma allora i 3 eventi sono mutuamente esclusivi e si ha che $P((A \ \& \ \neg B) \cup (B \ \& \ \neg C) \cup (C \ \& \ \neg A)) = \frac{9}{8} > 1$ il che è evidentemente assurdo. Ciò che distingue la struttura probabilistica della meccanica quantistica da quella classica è il fatto che la funzione d'onda è in generale una superposizione di più stati corrispondenti a misure diverse, i vari stati esistono contemporaneamente fintanto che non si effettua la misura.

Tornando all'esempio di prima, non si può quindi parlare delle varie misure come eventi mutualmente esclusivi in quanto prima delle misure entrambi gli stati B e $\neg B$ coesistono!

4.3 L'argomento di Wigner

Possiamo ricavare una disuguaglianza "simil Bell" molto elegantemente grazie ad un argomento di analisi combinatoria dovuto a Wigner. Presupponiamo come prima completa correlazione e località e consideriamo due particelle di cui si misura lo spin con orientazione individuata da versori in generale non ortogonali $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. I possibili stati con le relative popolazioni sono riassunti nella seguente tabella (si noti che non si presuppone che vengano svolte misure su medesime particelle e diverse orientazioni, bensì è possibile attribuire un valore certo senza alcuna misurazione proprio perchè si sta considerando come pre-determinato dalle variabili aggiuntive):



Figura 3: John Stewart Bell

Popolazione	Particella1	Particella2
N_1	$(\vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}+)$	$(\vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}-)$
N_2	$(\vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}-)$	$(\vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}+)$
N_3	$(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}+)$	$(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}-)$
N_4	$(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}-)$	$(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}+)$
N_5	$(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}+)$	$(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}-)$
N_6	$(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}-)$	$(\vec{a}+, \vec{b}-, \vec{c}+)$
N_7	$(\vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}+)$	$(\vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}-)$
N_8	$(\vec{a}-, \vec{b}-, \vec{c}-)$	$(\vec{a}+, \vec{b}+, \vec{c}+)$

Banalmente, poichè i conteggi sono numeri maggiori uguali di zero deve valere:

$$N_3 + N_4 \leq (N_2 + N_4) + (N_3 + N_7) \quad (9)$$

Chiamiamo $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$ la probabilità che in un caso qualsiasi un osservatore misuri sulla prima particella il valore + di spin con orientazione individuata dal vettore \vec{a} , un altro osservatore misuri sulla seconda particella il valore + di spin con orientazione individuata dal vettore \vec{b} e così via. Chiaramente si ha $P(\vec{a}+, \vec{b}+) = \frac{(N_3+N_4)}{\sum_i^8 N_i}$ similmente otteniamo $P(\vec{a}+, \vec{c}+) = \frac{(N_2+N_4)}{\sum_i^8 N_i}$ e $P(\vec{c}+, \vec{b}+) = \frac{(N_3+N_7)}{\sum_i^8 N_i}$. La condizione 9 diventa dunque

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) \leq P(\vec{a}+, \vec{c}+) + P(\vec{c}+, \vec{b}+) \quad (10)$$

Che è una disuguaglianza simile a quella di Bell ed è violata dalla medesima situazione illustrata precedentemente.

Si noti che in questo caso la grandezza P indica una probabilità mentre, nella disuguaglianza originale, il valore di aspettazione.

5 La Disuguaglianza CH74

Abbiamo già ribadito, all'interno di questo articolo, l'importanza di evidenze sperimentali affinché si possa convalidare o scartare una teoria. La disuguaglianza di Bell vuole fornire uno strumento discriminante, che possa essere utilizzato per verificare in laboratorio l'esistenza di variabili nascoste locali. In realtà, questa disuguaglianza ha un forte limite: viene derivata a partire dalla condizione $P(\vec{a}, \vec{a}) = -1$, ossia richiede *perfetta anticorrelazione*. Nella pratica, impostare un esperimento in grado di selezionare coppie di particelle in stato di singoletto (ma anche nel caso dei fotoni) senza alcuna perturbazione su di esso è estremamente complicato.

Per questa ragione, ulteriori disuguaglianze seguirono quella di Bell, tant'è che adesso si parla di **disuguaglianze di Bell** al plurale. L'originale, invece, è nota come **disuguaglianza OB** (Original bell inequality). Di particolare rilevanza furono la **disuguaglianza CHSH**, ideata da Clauser, Horne, Shimony e Holt nel 1969, e la **disuguaglianza CH74**, derivata poi nel 1974 sempre da Clauser e Horne (*Experimental Consequences Of Objectives Local Theories*).

Noi ci soffermiamo più che altro sulla seconda.

Consideriamo 2 particelle a due soli stati di spin. La variabile nascosta λ determina univocamente la direzione \vec{p} lungo la quale, se si misura lo spin per la particella A, si ha il 100% di probabilità di trovare lo stato +. A seconda di λ e della direzione \vec{a} in cui noi misuriamo, si ha una probabilità $p_1(\vec{a}, \lambda)$ di trovare lo stato +. Analogamente, definiamo per la seconda particella $p_2(\vec{b}, \lambda)$.

Noi non conosciamo λ , ma possiamo stimare statisticamente $p_j(\vec{a}) = \int d\lambda \rho(\lambda) p_j(\vec{a}, \lambda)$, $j = 1, 2$. La probabilità congiunta di misurare lo stato + per entrambe le particelle è invece:

$$p_{1,2}(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) p_{1,2}(\vec{a}, \vec{b}, \lambda)$$

Si può dimostrare che $\forall x, x' \in [0, X], \forall y, y' \in [0, Y]$ vale la seguente disuguaglianza:

$$-XY \leq xy - xy' + x'y + x'y' - Yx' - Xy \leq 0$$

Infatti, definendo $U = xy - xy' + x'y + x'y' - Yx' - Xy$:

1. Caso $x \geq x'$

$$U = (x - X)y + (y - Y)x' + (x' - x)y'$$

Tutti i pezzi son negativi, perciò $U \leq 0$.

2. Caso $x' \geq x$

$$U = x(y - y') + (x' - X)y + x'(y' - Y) \leq x(y - y') + (x' - X)y + x(y' - Y) = (x' - X)y + x(y - Y) \leq 0$$

Quindi $U \leq 0$ in generale.

3. Caso $y \geq y'$

$$U + XY = (X - x')(Y - y) + x'y' + x(y - y') \geq 0$$

4. Caso $x' \geq x$

$$U + XY = (X - x')(Y - y) + xy + (x' - x)y' \geq 0$$

5. Caso $x' \leq x$ e $y \leq y'$

$$U + XY = (X - x')(Y - y) + x'y + -(x - x')(y' - y) \geq 0$$

In quest'ultimo abbiamo aggiunto e tolto $x'y$.

Dunque, unendo gli ultimi tre casi, si ha in generale che $U \geq -XY$

Nel caso delle probabilità definite prima $X = Y = 1$, segue dunque che:

$$-1 \leq p_{1,2}(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) - p_{1,2}(\vec{a}, \vec{b}', \lambda) + p_{1,2}(\vec{a}', \vec{b}', \lambda) - p_1(\vec{a}', \lambda) - p_2(\vec{b}, \lambda) \leq 0$$

Siccome $\rho \in [0, 1]$ e $\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$, possiamo applicare ρ e l'integrale senza violare la disuguaglianza. Segue allora la disuguaglianza CH74:

$$-1 \leq p_{1,2}(\vec{a}, \vec{b}) - p_{1,2}(\vec{a}, \vec{b}') + p_{1,2}(\vec{a}', \vec{b}') - p_1(\vec{a}') - p_2(\vec{b}) \leq 0$$

Si noti che questa disuguaglianza è ben più generale della precedente in quanto non viene specificato lo stato delle due particelle. A dirla tutta non serve neanche specificare i valori assumibili dallo spin, vale in generale per le variabili aleatorie.

6 Esperimenti di Aspect

Le due disuguaglianze di Clauser e Horne permisero ad **Aspect** di impostare 3 esperimenti sfruttando coppie di fotoni in stato $|\Psi\rangle$ (polarizzazioni parallele), emessi da una reazione a cascata dell'atomo di calcio innescata da 2 laser. In queste condizioni, le perturbazioni dello stato entangled sono minime.

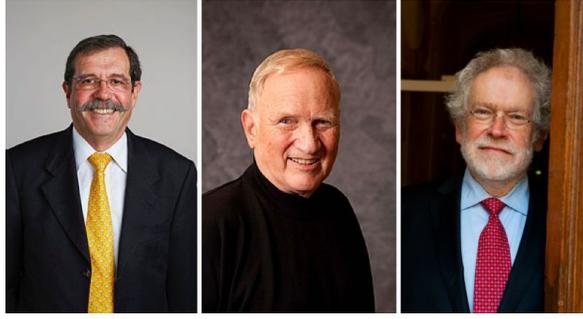


Figura 4: Da sinistra a destra, Alain Aspect, John Clauser e Anton Zeilinger, premio Nobel per la Fisica nel 2022 “for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science”.

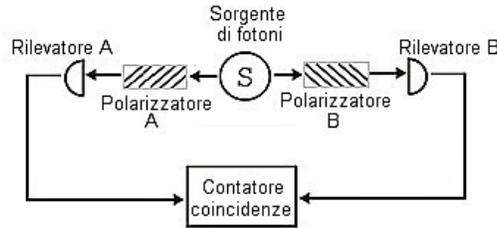


Figura 5: Schema del primo esperimento di Aspect.

6.1 08/1981: Experimental Tests of Realistic Local Theories Via Bell's Theorem

Nel primo esperimento le coppie di fotoni entangled vengono indirizzate verso due polarizzatori con orientazioni \vec{a} , \vec{b} , tali per cui i fotoni riescono a passare attraverso solo se possiedono la medesima direzione di polarizzazione. Dietro i polarizzatori ci sono due rivelatori che contano il numero di fotoni passanti (Fig. 5), in maniera da poter stimare $p_1(\vec{a}), p_2(\vec{b}), p_{1,2}(\vec{a}, \vec{b})$ in maniera empirica (ad esempio $p_{1,2}(\vec{a}, \vec{b})$ si stima come $R(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{N(\vec{a}, \vec{b})}{N(\infty, \infty)}$, dove N indica il conteggio mentre ∞ indica che non è stata impostata una direzione, in particolare $N(\infty, \infty)$ indica il conteggio totale, il numero di fotoni rilasciati.

L'esperimento viene eseguito modificando poi l'orientazione dei due polarizzatori, lungo \vec{a}' e \vec{b}' , in modo da poter stimare $S = R(\vec{a}, \vec{b}) - R(\vec{a}, \vec{b}') + R(\vec{a}', \vec{b}) + R(\vec{a}', \vec{b}') - R(\vec{a}', \infty) - R(\infty, \vec{b})$ e verificare se $-1 \leq S \leq 0$.

Furono usati assi ruotati tra loro prima di 22,5 gradi, poi di 67,5. Il risultato fu:

$$S = 0,126 \pm 0,014$$

Da cui la violazione della disuguaglianza CH74.

Secondo la MQ invece, avendo fotoni con polarizzazioni parallele:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\alpha$$

Da cui si può calcolare S .

In realtà bisogna tenere conto del fatto che i polarizzatori non sono ideali, più precisamente hanno le seguenti **trasmissioni**:

1. $\epsilon_M^1 = 0,971 \pm 0,005$
2. $\epsilon_m^1 = 0,029 \pm 0,005$
3. $\epsilon_M^2 = 0,968 \pm 0,005$

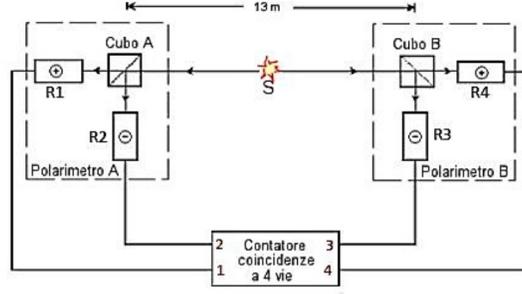


Figura 6: Schema del secondo esperimento di Aspect.

$$4. \epsilon_m^2 = 0,028 \pm 0,005$$

Ossia si ha una probabilità attorno al 3% di lasciar passare un fotone con polarizzazione ortogonale all'asse di trasmissione del polarizzatore.

La probabilità di misurare due fotoni va allora ricalcolata:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}(\epsilon_M^1 + \epsilon_m^1)(\epsilon_M^2 + \epsilon_m^2) + \frac{1}{4}(\epsilon_M^1 - \epsilon_m^1)(\epsilon_M^2 - \epsilon_m^2)f(\theta) \cos 2\alpha$$

Dove $f(\theta) = 0,984$ è un ulteriore parametro che tiene conto dell'angolo solido finito entro il quale le lenti attorno alla sorgente riescono ad incanalare i fotoni verso i polarizzatori.

Usando tale formula, è possibile calcolare S_{QM} , che risulta essere

$$S_{QM} = 0,118$$

Che è compatibile con il risultato sperimentale $S = 0,126 \pm 0,014$.

6.2 07/1982, Experimental Realization Of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation Of Bell's Inequalities

obiezione sul primo esperimento: a volte il rivelatore si perde dei fotoni, da cui una sottostima delle probabilità.

Aspect propone allora un secondo esperimento, dove al posto dei polarizzatori tradizionali si usano dei materiali birifrangenti, in grado di indirizzare i fotoni verso due rivelatori diversi a seconda del loro asse di polarizzazione (Fig. 6). In questo modo, se un fotone viene perso, è possibile accorgersene in quanto nessun rivelatore lo conta.

In questo esperimento Aspect testò la disuguaglianza CHSH, per cui $|U| \leq 2$, con

$$U = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}')$$

Mentre $E(\vec{a}, \vec{b})$ è la correlazione delle misure A, B che danno come risultato +1 se il fotone ha una certa polarizzazione, -1 se ha quella ortogonale.

Risultato:

$$U = 2,697 \pm 0,005$$

Violando quindi anche la disuguaglianza CHSH.

Per la MQ invece, per quanto già visto, abbiamo che

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \langle AB \rangle = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$

Da cui, tenendo conto di ulteriori accorgimenti sull'imperfezione dei polarizzatori, si può calcolare U :

$$U_{MQ} = 2,70 \pm 0,05$$

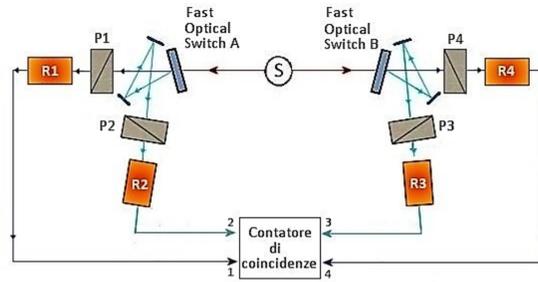


Figura 7: Schema del terzo esperimento di Aspect.

6.3 12/1982: Experimental Test Of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers

Nuova **obiezione**: è possibile che, durante le misurazioni, l'apparato di misura e la sorgente interagiscano. Ciò può influire sulla correlazione delle misure, ad esempio può essere che, un volta che i primi fotoni collassano su uno stato, questi mandino un segnale alla sorgente sullo stato dei polarizzatori (ossia i fotoni e la sorgente potrebbero essere a loro volta entangled) influenzando lo stato di polarizzazione dei fotoni successivi. In tal caso si potrebbe avere correlazione senza violare la località.

Così Aspect presentò un terzo esperimento: questa volta furono aggiunti degli **switch ottici** in grado di mandare i fotoni verso due diversi polarizzatori a seconda del loro stato (Fig. 7). Ogni volta che i nuovi fotoni partono, un algoritmo assegna uno stato ai due switch, in maniera da scegliere in maniera casuale quale asse di polarizzazione misurare. Le distanze sono scelte in modo da rendere impossibile una comunicazione tra i fotoni e la sorgente che non violi la Relatività Ristretta.

Questa volta si tornò sulla disuguaglianza CH74 e i risultati furono i seguenti:

$$S = 0,101 \pm 0,020$$

$$S_{QM} = 0,112$$

Si ottenne quindi l'ennesima violazione della disuguaglianza CH74, mentre la MQ venne nuovamente confermata.

7 Attuale soluzione al paradosso

7.1 Altre teorie delle variabili nascoste

L'argomentazione di Einstein, basata sul principio di località, implica l'incompletezza della Meccanica Quantistica. L'incompletezza si può risolvere con l'aggiunta di variabili nascoste locali, ma abbiamo visto che gli attuali esperimenti escludono l'esistenza di quest'ultime. E allora? Come si risolve il Paradosso?

Rimangono le teorie con variabili nascoste non locali, che ancora non abbiamo discusso. In realtà queste non costituiscono una reale soluzione, in quanto richiedono che venga meno il principio di località, sulla quale si basa la dimostrazione dell'incompletezza stessa della MQ (ripristinerebbero però il carattere deterministico della teoria).

Esistono altre teorie delle variabili nascoste locali che sfruttano formulazioni differenti da quella di Bell. Queste tipicamente risultano essere o inconsistenti, o semplicemente *non verificabili sperimentalmente*. Quest'ultimo caso riguarda teorie che ricadono sostanzialmente nella metafisica, perdendo di fatto la connotazione di teoria fisica e divenendo inutili (nel senso che non aggiungono "predizioni nuove" alla teoria). Un esempio è l'**interpretazione a multi universi** di **Hugh Everett III**, secondo la quale gli autovalori di un'osservabile corrispondono ad universi diversi in cui tale misura si

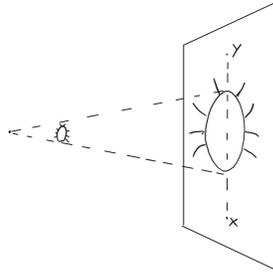


Figura 8: Esempio di influsso superluminare: il rapporto tra la velocità dell'ombra e quella dell'insetto è uguale al rapporto tra la lunghezza dell'ombra e quella dell'insetto. Quest'ultimo può essere regolato a piacere allontanando la parete o avvicinando la luce all'insetto.

realizza. In pratica tutti i possibili risultati avvengono, ma in universi diversi. Per quanto l'idea possa risultare affascinante e salvare la località (le misure risultano essere predeterminate dal semplice fatto di appartenere ad un preciso universo), la teoria non formula alcun tipo di predizione in più rispetto alla classica **interpretazione di Copenaghen**, per cui risulta essere non falsificabile nè verificabile.

7.2 Violazione apparente della Relatività

La naturale soluzione del paradosso è dunque abbandonare l'idea della località.

Il problema del paradosso EPR sta nell'ipotizzare che valga il principio di località "forte", ossia che nessuna entità o segnale possa viaggiare a velocità superiori di quella della luce. Per quanto questo possa apparire controintuitivo, esistono molti fenomeni fisici, ben più banali dell'entanglement, in grado di superare tale velocità. Tali fenomeni sono detti **influssi superluminali**.

Ad esempio, possiamo proiettare l'ombra di un insetto che si muove a velocità v su una parete sufficientemente distante in maniera tale che l'ombra si muova a velocità maggiore di quella della luce (Fig. 8).

La questione fondamentale è se questi influssi superluminali possano o meno trasferire informazioni a velocità maggiori di c . Se ciò succedesse verrebbe meno il **Principio di Causalità** e allora sì che avremmo problemi: a seconda del SdR uno potrebbe vedere l'evento A come causa dell'evento B ed un'altro potrebbe vedere il contrario. Si potrebbe addirittura assistere ad eventi paradossali come il nipote che uccide il proprio nonno ancora prima di essere nato (**Paradosso del nonno**). Fortunatamente non è così.

Se torniamo al caso dell'ombra, non c'è alcun modo affinché due osservatori possano comunicare utilizzando l'ombra proiettata di un insetto, perciò non si crea alcun problema di natura causale. Affinchè tale principio si conservi, serve che *nessuna informazione possa propagarsi a velocità superiori di quella della luce*, mentre gli influssi superluminali sono categoricamente esclusi da questa condizione.

Tornando all'entanglement, è fondamentale mostrare che i relativi influssi superluminali non permettano il trasferimento di informazioni.

A salvare il principio di causa-effetto (e la Scienza), interviene a nostro favore il **Teorema di non comunicazione**.

7.3 Teorema di non comunicazione

Il Teorema di non comunicazione asserisce che, durante la misurazione di uno stato quantistico entangled, non è possibile per un osservatore inviare informazioni in maniera istantanea ad un altro.

Noi non forniamo una vera dimostrazione, ma sostanzialmente il teorema deriva da due fatti. Il primo riguarda la statistica delle misure su più insiemi di particelle in stato entangled: un osservatore non sarà mai in grado, a partire dal risultato delle varie misure, di accorgersi se un altro osservatore ha effettuato una misura o meno. Il secondo fatto riguarda invece il **Teorema di no-cloning quantistico**, per cui è impossibile realizzare una *copiatrice quantistica universale*, ossia una macchina in grado di clonare lo stato di un qualsiasi sistema. Ciò impedisce quindi di effettuare n copie del proprio sistema ed effettuare le misure su quest'ultimo per capire se e cosa l'altro osservatore ha misurato.

Torniamo sul caso di Alice e Bob. Qualsiasi sia il comportamento di Alice sulle varie coppie di elettro-

ni, Bob non ha alcun modo di rendersene conto. Infatti Alice non può scegliere che misura ottenere, e la casualità del suo risultato farà sì che anche le misure di Bob risultino del tutto casuali. L'unica decisione che Alice può prendere è se misurare o meno, ma la distribuzione statistica di Bob non ne risentirebbe. Ad esempio, se Alice non misura mai allora Bob ha il 50% di probabilità di misurare + lungo la sua direzione \vec{b} . Se invece Alice misura sempre, per un numero grande di misure N avremo circa $N/2$ misure + per Alice, da cui $\frac{N}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ misure - per Bob, e $N/2$ misure - per Alice, da cui altre $\frac{N}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ misure - per Bob, per un totale di $N/2$. Non cambia niente!

Se invece Bob potesse clonare il proprio stato ed effettuare misure sulle copie, sarebbe in grado di ricostruirlo con esattezza. Ciò permetterebbe comunicazioni superluminali. Ad esempio, Bob e Alice potrebbero accordarsi sul significato del misurare o meno lo stato di un elettrone. Potrebbero decidere che se Alice misura lo stato allora questo corrisponde ad un segnale di allarme, dopodichè Bob parte e va su un pianeta distante 10 anni luce. Clonando mensilmente il proprio stato e misurandolo, può accorgersi con 9 anni e 11 mesi di anticipo se il segnale di allarme è stato inviato o meno.

Come già detto, ciò non è possibile. Supponiamo infatti di avere una macchina in grado di clonare un certo sistema $|\psi\rangle$. Ciò significa che se prendiamo uno stato $|\xi\rangle$ su cui copiare $|\psi\rangle$, allora la nostra macchina deve agire come un operatore (che supporremo unitario per non dover rinormalizzare gli autovettori) U tale che

$$U |\psi\rangle |\xi\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle |\psi\rangle$$

Ciò in generale è *possibile*. Ma se vogliamo che la nostra macchina sia universale, allora serve che, dato un secondo stato $|\phi\rangle$:

$$\begin{aligned} U |\phi\rangle |\xi\rangle &= e^{i\beta} |\phi\rangle |\phi\rangle \implies \langle\phi| \langle\xi| U^\dagger = e^{-i\beta} \langle\phi| \langle\phi| \\ &\implies |\langle\phi| \langle\xi| U^\dagger U |\psi\rangle |\xi\rangle| = |e^{i(\alpha-\beta)} \langle\phi| \langle\phi|\psi\rangle |\psi\rangle| \end{aligned}$$

Supponendo che gli stati siano già normalizzati, si ha che $\langle\xi|\xi\rangle = 1$, in più l'esponenziale ha norma 1, da cui

$$|\langle\phi|\psi\rangle| = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

Ossia o $|\langle\phi|\psi\rangle| = 1$ ossia $|\psi\rangle = e^{i\gamma} |\phi\rangle$ (sono lo stesso stato), oppure $|\langle\phi|\psi\rangle| = 0$ ossia i due stati sono ortogonali.

Data una copiatrice quantistica in grado di copiare ψ , gli unici altri stati che è in grado di copiare sono o lo stato stesso oppure quelli ad esso ortogonali.

Non esistono copiatrici quantistiche universali ma solo copiatrici di stati puri. Se invece considerassimo un superposition state $\alpha |\psi\rangle + \beta |\phi\rangle$, allora

$$U(\alpha |\psi\rangle + \beta |\phi\rangle) |\xi\rangle = \alpha U |\psi\rangle |\xi\rangle + \beta U |\phi\rangle |\xi\rangle = \alpha |\phi\rangle |\phi\rangle + \beta |\phi\rangle |\phi\rangle$$

Ossia non solo non si avrebbe clonazione, ma lo stato originale risulterebbe perso.

Quello che invece avremmo voluto ottenere è:

$$U(\alpha |\psi\rangle + \beta |\phi\rangle) |\xi\rangle = U(\alpha |\psi\rangle + \beta |\phi\rangle)(\alpha |\psi\rangle + \beta |\phi\rangle) = \alpha^2 |\psi\rangle |\psi\rangle + \beta^2 |\phi\rangle |\phi\rangle + \alpha\beta(|\psi\rangle |\phi\rangle + |\phi\rangle |\psi\rangle)$$

Che è ben diverso.

Possiamo concludere che, almeno per il momento, la causalità risulta essere salva.

8 Conclusione

Einstein, Podolsky e Rosen nel loro celeberrimo articolo si appellarono alla località per salvare il determinismo. Ironicamente, ciò non salvò il determinismo e portò, invece, alla morte della località stessa.

88 anni dopo, nessuna prova sperimentale ha falsificato le predizioni della Meccanica Quantistica ma ancora oggi si lavora in direzioni opposte. Per ora questi sforzi sono risultati pressochè vani, mentre la MQ sta resistendo alla prova del tempo. Tuttavia non è da escludere che le cose possano cambiare in futuro: così come la Meccanica Classica è stata scalciata dalla Relatività e dalla Meccanica Quantistica, così le prossime generazioni potrebbero scartare quest'ultime a loro volta e formularne di nuove, chiedendosi come siamo potuti essere così ingenui da credere a tutto ciò.