GRUPPO COLLEGATO DI PARMA

Newsletter II-4

5 Gennaio 2007

Il Rujksmuseum (http://www.rijksmuseum.nl/index.jsp) di Amsterdam ci regala ogni giorno un'opera diversa (van Gogh, Rembrandt,…) - disponibile come widget sotto MAC-OS-X oppure Yahoo per Windog (http://widgets.yahoo.com/).

Notizie dall'INFN

Prima pagina INFN: http://www.infn.it/comunicati/

Sezione di Milano Bicocca: http://www.mib.infn.it/, http://www.pr.infn.it/

L'angolo Matlab: funzioni aritmetiche I (e.o)

Per funzioni aritmetiche si intendono in generale funzioni definite sugli interi o piu` in generale su insiemi discreti. Un'introduzione elementare si può trovare sul libro di Andrews (v. biblio). L'interesse delle funzioni aritmetiche esce dallo stretto ambito della matematica pura ed è ormai condiviso da molti fisici teorici (uno degli ultimi lavori di Polyakov non a caso contiene un gioco di parole sulla "teoria di Polya(kov)", Polya essendo uno dei matematici che più ha contribuito allo sviluppo e alla diffusione delle idee legate alle funzioni aritmetiche). Qui daremo una sbrigativa definizione delle funzioni più comuni e mostreremo come implementarle in matlab. Non è il linguaggio più adatto, soprattutto per il fatto che gli interi non possono eccedere 2^54; se qualcuno è in grado di creare qualche estensione in C che utilizzi "gmp" e da tradurre con "mex" in un formato comprensibile a matlab, lo può pubblicare sul sito di Mathworks (<u>*vedi nota in ultima pagina*</u>). Un programma orientato alla teoria dei numeri e` *PARI/gp* (*http://pari.math.u-bordeaux.fr/*) che utilizza la libreria *gmp* per operazioni aritmetiche con precisione illimitata. Con *gp* le funzioni aritmetiche si possono calcolare per qualunque intero, l'unico limite essendo costituito dalla memoria disponibile e dal tempo a disposizione.

GMP
«Arithmetic without limitations»

Veniamo alla definizione delle funzioni elementari:

d(n): conta il numero di divisori di n, ad es.: d(24)=8, in quanto i divisori di 24 sono 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 (cioe` si contano come divisori sia 1 che n), e quindi d(p)=2 se p e` primo.

σ(n): la somma dei divisori di n.

φ(n): (la funzione di *Eulero*), conta il numero di interi compresi tra 1 ed n, primi rispetto ad n: ad es. φ*(18)* = *6*, infatti si ha

gcd(*18,k*)= [*1 2 3 2 1 6 1 2 9 2 1 6 1 2 3 2 1*] per k<*18*

e compare sei volte il numero *1*.

μ(n): (la funzione di *Moebius)* definita come *(-1)^p* se *n* è il prodotto di *p* fattori primi distinti, μ*(1)=1*, μ*(n)=0* se *n* è divisibile per un quadrato perfetto.

Per implementare queste funzioni in matlab, bisogna prima di tutto individuare un algoritmo, preferibilmente quello più efficiente. Ad es. per φ(n) si potrebbe appunto calcolare gcd(`1:n,n`) e catturare i numeri primi rispetto a n. E` questo l'algoritmo ottimale? Si vede rapidamente che questo non è vero; definiamo una funzione "anonima" così

```
>> phi=@(n) length(find(gcd(1:n-1,n)==1));
```

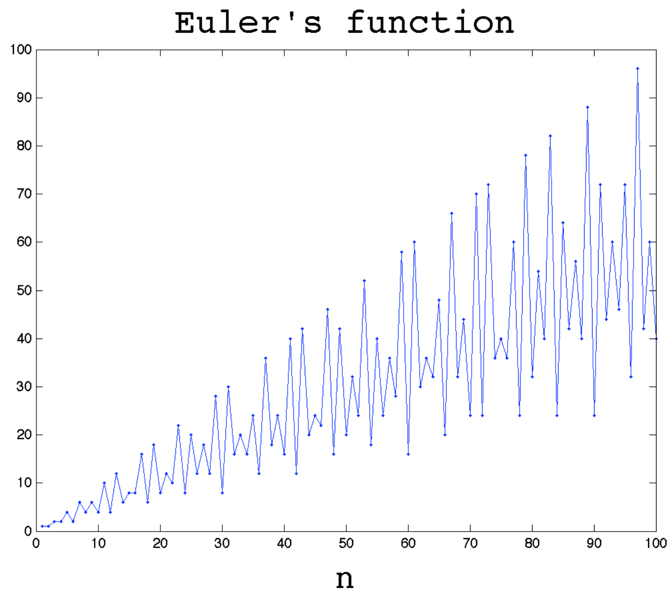
e troviamo phi(10^5)=40000 in 6" (il mio G4 è lento, ma quello che conta è il confronto tra i vari algoritmi non i tempi assoluti). L'algoritmo *eulerphi* calcola correttamente lo stesso valore in .0015". L'algoritmo fa uso del fatto che se $n = p_1^{k_1} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ allora

$$\phi(n) = n \prod_k (1 - 1/p_k)$$

Per implementare questa formula dobbiamo utilizzare un algoritmo di fattorizzazione per determinare i fattori primi, eliminare la molteplicità e calcolare il prodotto. In matlab la funzione *factor* ritorna i fattori primi di n utilizzando il "crivello di Eratostene".

Dunque p=unique(factor(n)); phi=n*prod(1-1./p) ci dà la funzione di Eulero (la funzione *factor* richiede *n*<2^32). Notare l'uso della funzione "*unique*" di matlab, che individua i fattori distinti. Questa funzione si può utilizzare per calcolare la funzione di Moebius: *p=factor(n); pu=unique(p); if length(p)>length(pu), mu=0, else mu=(-1)^length(p)*, con l'eccezione $\mu(1) = 1$ che va definita convenzionalmente a parte.

Anche le altre due funzioni d(n) e σ(n) sono facilmente realizzate avendo a disposizione la funzione "factor". Si troveranno i files con tutte le definizioni nel package "arithmetic.tar.gz" sulla mia pagina web (attraverso CampusNet). Le funzioni sono un po' più complicate di quanto descritto qui in quanto si e` voluto scriverle in modo che ammettano input vettoriali, ad es. plot(eulerphi(1:100)) dà la figura qui accanto.



La funzione d(n) fa uso di una possibilità in più offerta dala funzione "*unique*": consideriamo l'esempio *factor*(504) = [2 2 2 3 3 7]. Un divisore generico di 504 si ottiene prendendo una potenza di 2 con esponente minore o uguale a 3, moltiplicando per una potenza di 3 con esponente minore o uguale a 2 etc. Il numero di divisori è percio` 4 * 3 * 2 = 24. Ora *[p,i]=unique(factor(504))* ritorna

p = [2 3 7]

i = [3 5 6] → [indici dove cominciano i fattori differenti]

e dunque gli esponenti sono dati da *[i(1), diff(i)]*. Se si e` interessati alla lista dei divisori, allora il calcolo comporta il problema di costruire l'insieme di tutti i sottoinsiemi della lista dei fattori primi: ad es. per 504 si hanno 6 fattori primi e ognuno di questi può comparire o no come fattore di un dato divisore. La nostra formulazione di *divisors.m* e` la seguente

```
function D=divisors(n)
% the list of divisors of an integer.
% Usage:
%   D=divisors(n)
% E.Onofri©2006

if(isprime(n))
    D=[1,n];
else
    Fn=factor(n);              % prime factors
    N=length(Fn);
    p = allSubsets(N);         % all subsets of prime list of n
    z = ones(2^N,1)*Fn;
    D = prod((z.^(p-'0'))')'; % take primes^[(0,1)^N] at once
end

D=unique(D)';        % eliminate redundancies
```

Con queste funzioni possiamo verificare talune delle proprietà più semplici. Ad es. d, φ,μ e σ sono *moltiplicative,* cioè *f(nm)=f(n) f(m)* se *gcd(n,m)=1*. In generale si dice che se $f(n) = \sum_{k|n} g(k)$ allora *(f,g)* costituiscono una "*coppia di Moebius*" e vale la formula inversa $\mathrm{g(n)} = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d)$. Un risultato molto elegante è il seguente: *se (f,g) sono una tale coppia di funzioni, f è moltiplicativa se e solo se g ha la stessa proprietà.* Ora dal fatto che *g(n)=n* è ovviamente moltiplicativa, segue che anche φ lo è.

Le quattro funzioni sono legate dalle relazioni

(k|n significa che k deve divide n)

$$\sigma(n) = \sum_{k|n} k$$

$$d(n) = \sum_{k|n} 1 \qquad \sum_{k|n} \mu(k) d(\tfrac{n}{k}) = 1$$

$$\varphi(n) = \sum_{k|n} \mu(k) \frac{n}{k} \qquad n = \sum_{k|n} \varphi(k)$$

Esiste una relazione che lega tra loro σ(n), μ(n) e la ς(s) di Riemann, trovata (indovinate da chi?) quasi cento anni fa: sia

$$c_q(n) = \sum_q{}' \exp\{2\pi inp/q\} = \sum_{d|\gcd(q,n)} \mu(q/d)\, d$$

dove la somma si estende a tutti i *p<q* e *gcd(p,q)=1*; allora

$$U(n,s) = \sum_{q=1}^{\infty} c_q(n)\, q^{-s} = n^{1-s}\sigma_{1-s}(n)/\zeta(s)$$

in particolare

$$\sum_{q\geq 1} \mu(q) q^{-s} = 1/\zeta(s)$$

In gp troviamo le quattro funzioni definite come **d**→sigma(n,0), **μ**→moebius, **φ**→eulerphi, **σ**→sigma. E ora non ci sono limitazioni...

```
? eulerphi(10^100+1)
%25 = 97523712716272922809740267774877124178248891010664155960723249805304194960
0628225813250048000000000
```

Nel numero precedente si era accennato alla trasformazione set-teoretica

$$g(T) = \sum_{Y \supseteq T} f(Y)$$

e alla sua inversa. Questo argomento, correlato alla funzione di Moebius, verrà trattato nel prossimo numero.

Bibliografia:

G.E.Andrews, *Number Theory*, Dover 1994
K. Chandrasekharan, *Arithmetical Functions*, Springer 1970.
G. H. Hardy, *Ramanujan*, AMS Chelsea Pub. 1978 (prima ediz. Cambridge 1940).
R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol.I, Cambridge, 1997

Articoli recenti su hep-th (Infn Mib/PR)

hep-th/0609168 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Non-Commutative (Softly Broken) Supersymmetric Yang-Mills-Chern-Simons**
Authors: **Nicola Caporaso**, **Sara Pasquetti**
Comments: 42 pages, 11 figures, uses Axodraw. Bibliography revised

hep-ph/0612073 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Resummed Mass Distribution for Jets Initiated by Massive Quarks**
Authors: **Ugo Aglietti (Rome U. & INFN, Rome), Leonardo Di Giustino (Parma U. & INFN, Parma), Giancarlo Ferrera (Rome U. & INFN, Rome), Luca Trentadue (Parma U. & INFN, Parma)**
Comments: 24 pages

astro-ph/0609473 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Accurate simulations of the dynamical barmode instability in full General Relativity**
Authors: **Luca Baiotti**, **Roberto De Pietri**, **Gian Mario Manca**, **Luciano Rezzolla**
Comments: RevTeX4, 23 pages, 19 figures

hep-th/0610155 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Black Holes, Instanton Counting on Toric Singularities and q-Deformed Two-Dimensional Yang-Mills Theory**
Authors: **Luca Griguolo**, **Domenico Seminara**, **Richard J. Szabo**, **Alessandro Tanzini**
Comments: 27 pages

hep-th/0610045 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **The planar spectrum in U(N)-invariant quantum mechanics by Fock space methods: I. The bosonic case**
Authors: **R. De Pietri**, **S. Mori**, **E. Onofri**
Comments: 17 pages, 4 figures, uses youngtab.sty. Final version

hep-th/0612248 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **N=4 SUSY Yang--Mills: three loops made simple(r)**
Authors: **Yu.L. Dokshitzer**, **G. Marchesini**
Comments: 19 pages, 1 figure

hep-ph/0608272 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **QCD Corrections to Vector Boson Pair Production via Weak Boson Fusion**
Authors: **B. Jager**, **C. Oleari**, **D. Zeppenfeld**
Comments: 8 pages, 4 figures, presented at the conference "Physics at LHC 2006", Cracow, Poland, 3-8 July 2006

hep-ph/0607022 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Power-suppressed effects in heavy quark fragmentation functions**
Authors: **Matteo Cacciari**, **Paolo Nason**, **Carlo Oleari**
Comments: Latex, 9 pages, talk given by M. Cacciari at FRIF workshop on first principles non-perturbative QCD of hadron jets, LPTHE, Paris, France, 12-14 Jan 2006

hep-ph/0606275 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **A Positive-Weight Next-to-Leading-Order Monte Carlo for Z Pair Hadroproduction**
Authors: **Paolo Nason**, **Giovanni Ridolfi**
Comments: 33 pages, 10 figures
Journal-ref: JHEP 0608 (2006) 077

astro-ph/0605409 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Dilute and Collapsed Phases of the Self-Gravitating Gas**
Authors: **C. Destri**, **H. J. de Vega**
Comments: 17 pages, 7 color figures
Subj-class: Astrophysics; Statistical Mechanics

hep-th/0606125 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Conformal invariance of the planar beta-deformed N=4 SYM theory requires beta real**
Authors: Federico Elmetti, Andrea Mauri, Silvia Penati, Alberto Santambrogio, Daniela Zanon
Comments: LaTex, 15 pages, 7 figures

hep-th/0608063 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Non-supersymmetric Meta-Stable vacua in SU(N) SQCD with adjoint matter**
Authors: A. Amariti, L. Girardello, A. Mariotti
Comments: 14 pages, 2 figures

hep-th/0611229 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Counting BPS Baryonic Operators in CFTs with Sasaki-Einstein duals**
Authors: Agostino Butti, Davide Forcella, Alberto Zaffaroni
Comments: 46 pages, 10 figures

hep-lat/0611013 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **High-loop perturbative renormalization constants for Lattice QCD (I): finite constants for Wilson quark currents**
Authors: F. Di Renzo, V. Miccio, L. Scorzato, C. Torrero
Comments: 22 pages, 10 figures out of 16 eps files

hep-lat/0609077 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Renormalization constants for Lattice QCD: new results from Numerical Stochastic Perturbation Theory**
Authors: Francesco Di Renzo, Vincenzo Miccio, Luigi Scorzato, Christian Torrero
Comments: 7 pages, talk given at Lattice 2006 (Quark Masses, Gauge Couplings, and Renormalization)

hep-lat/0609048 [abs, ps, pdf, other] :
Title: **Renormalization of infrared contributions to the QCD pressure**
Authors: C. Torrero, M. Laine, Y. Schroder, F. Di Renzo, V. Miccio
Comments: 7 pages, 4 figures, talk presented at Lattice 2006 (High temperature and density)

Amarcord SNFT2003

Proseguiamo con la pubblicazione delle liste dei partecipanti al nostro Seminario Nazionale di Fisica Teorica, a partire dal 1991:

XII – 1/12 settembre 2003

http://www.pr.infn.it/snft/2003/SNFT-2003.html

Modello Standard

Guido Altarelli *CERN - Università di Roma Tre,* ***Interazioni Elettrodeboli nel MS e oltre***
Giovanni Ridolfi *INFN - Genova,* ***Introduzione alle teorie supersimmetriche***
Ferruccio Feruglio *Università di Padova,* ***Masse dei neutrini e unificazione delle interazioni fondamentali***

Supersimmetria e Modelli Matriciali

Gabriele Ferretti *Chalmers U. of Tech., Goteborg,* ***Large N limit and Supersymmetry***
Giovanni Cicuta *Università di Parma,* ***Matrici aleatorie***
Ken Konishi *Università di Pisa,* ***Dinamica non perturbativa in Teorie di Gauge con Supersimmetrie N=1 e N=2***
Massimo Bianchi *Università di Roma Tor Vergata,* ***Rinormalizzazione olografica***

GRUPPO COLLEGATO DI PARMA

Partecipanti:

Allitto Francesco, Dott. XVIII ciclo, Messina
Apolloni Andrea, Dott. XVIII ciclo, Torino
Arianos Sergio, Dott. XVIII ciclo, Torino
Benedetti Dario, Ph.D., Utrecht
Benvenuti Sergio, Perfezionamento SNS, Pisa
Beraldo Andrea, Dott. XVIII, Torino
Blasi Andrea, Dott. XVII ciclo, Lecce
Calcagni Gianluca, Dott. XVII ciclo, Parma
Caporaso Nicola, Dott. XVIII ciclo, Firenze
Cartegni Lucia, Perfez. in Nanotecnologie, Milano
Ceccopieri Federico Alberto, Dott. XVII ciclo, Parma
D'Urso Domenico, Dott. XVIII ciclo, Catania
Esposito Marco, Dott. XVIII ciclo, Perugia
Ferretti Luca, Laureando, Pisa
Fraschetti Federico, Dott. XVII ciclo, Trento
Genovese Luigi, Dott. XVIII ciclo, Roma Tor Vergata (2settimana)
Gili Valeria, Dott. XVIII ciclo, Pavia
Giudice Pietro, Dott. XVIII ciclo, Cosenza
Giusiano Giovanni, Dott. XVII ciclo, Perugia, **Gruzza** Alessia, Dott. XVIII ciclo Parma, **Guadagnoli** Diego, Dott. XVIII ciclo, Roma La Sapienza, **Guffanti** Alberto, Dott. XVI ciclo, Parma, **Mantovi** Andrea , Dott. XVII ciclo, Parma, **Miccio** Vincenzo, Dott. XVII ciclo, Parma, **Milanesi** Giuseppe, neolaureato, Pisa, **Neri** Franco Maria, Dott. XVIII ciclo, Parma, **Panero** Marco, Dott. XVI ciclo, Torino, **Pessina** Nicola, Dott. XVII ciclo, Parma, **Poloni** Guy Umberto, Dott. XVIII ciclo, Milano, **Schimd** Carlo, Dott. XVII ciclo Parma

Nel prossimo numero

- Fisica in Argentina: Marisa Bonini.
- GGI: progetti 2008
- L'angolo Matlab: Funzioni aritmetiche II

Quiz: cosa rappresenta la foto qui a destra? ☛

Nota su "multiple precision" in Matlab. Sul sito Mathworks si trova già un toolbox che realizza (hopefully) l'aritmetica a precisione illimitata (mptoolbox). Non è di agevole installazione e la documentazione è un po' sintetica… Tuttavia

```
>> mp_pi
ans{1} =
+.3141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406287 2e1+0i
```

La traduzione delle funzioni d(n), φ(n) etc è lasciata come esercizio.

INFN Sezione di Milano Bicocca
Gruppo Collegato di Parma
c/o Dipartimento di Fisica,
Università di Parma
Via G.P. Usberti 7/A
I-43100 Parma, Italy
Tel: +39 0521 905222, FAX: +39 0521 905223
Email: <user>@fis.unipr.it

Bollettini arretrati:
http://www.pr.infn.it/newsletter.html

Responsabile: E. Onofri, Collaboratori: L. Superchi, F. Di Renzo, L. Griguolo - Numero **II**-4 - 5.1.2007