

# Tecniche di interpolazione ed analogie meccaniche in sistemi disordinati

Aldo Di Biasio

Università di Parma

May 30, 2012

*In collaborazione con A. Barra, F. Guerra (Università di Roma La Sapienza),  
E. Agliari, R. Burioni (Università di Parma)*

# Table of contents

- 1 Introduzione
- 2 Un esempio: il modello di Curie-Weiss
- 3 Tecniche di interpolazione
- 4 Modello di Sherrington-Kirkpatrick
- 5 P-spin-glass
- 6 Conclusioni

# Spin Glass

- Modelli fondamentali nei sistemi disordinati (e non solo)
- Hamiltoniana di **Edwards-Anderson** ( $d$  finita)

$$H_{EA} = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

- $J_{ij} = J_{ji}$  **variabili random** (caso tipico: gaussiane)
- Energia libera

$$F_N(\beta) = -\frac{1}{\beta} \log Z_N(\beta, J) \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\beta} \mathbb{E} \log Z_N(\beta, J), & \text{quenched} \\ -\frac{1}{\beta} \log \mathbb{E} Z_N(\beta, J), & \text{annealed} \end{cases}$$

- Modelli di campo medio (**Sherrington-Kirkpatrick**)  
*Edwards, Anderson (1975); Sherrington, Kirkpatrick (1975).*

# Metodi e tecniche

Negli anni sono stati sviluppati svariati metodi per lo studio degli spin-glass

- **Replica Trick** (Sherrington e Kirkpatrick)

$$Z_N \rightarrow Z_N^n \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} \left( \frac{Z_N^n - 1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow 0} \mathbb{E} \log Z_N$$

→ Calcolo Energia libera e proprietà fisiche (**Ansatz RSB**)

- Cavity Method  $(F_{N+1} - F_N)/(N+1 - N) \sim f_N$

*Parisi(1982)*

# Tecniche di interpolazione

Funzione di partizione generalizzata con parametri di interpolazione

→ Risultati rigorosi nei sistemi disordinati

- Esistenza del limite termodinamico, Calcolo rigoroso dell'energia libera,... (24 anni dopo)
- Analogia con sistema meccanico
- Diamo un'idea del funzionamento su un modello semplice (Curie-Weiss)
- Sketch di un applicazione al modello di Sherrington-Kirkpatrick (SK) e p-spin.

*Guerra, Toninelli (2002); Talagrand (2006).*

# Un modello semplice

$$H_N = -\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j$$

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta H_N)$$

$$\alpha_N(\beta, h) = -\beta f_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \log Z_N$$

- Modello di campo medio per il ferromagnetismo
- Transizione di fase alla temperatura critica  $T = T_c = 1$   
( $m_N = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$  è il parametro d'ordine)
- Molto più semplice da studiare del modello SK

# Soluzione

- Energia libera nel limite termodinamico

$$\alpha(\beta, h) = \sup_M \left\{ \log 2 + \log \cosh \beta M - \frac{1}{2} \beta M^2 \right\}$$

- Equazione di autoconsistenza per il parametro d'ordine

$$M = \tanh(\beta M)$$

# Un "Nuovo" modello

$$Z_N(x, t) \equiv \sum_{\sigma} \exp \left( \frac{t}{N} \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j + x \sum_i \sigma_i \right)$$

$$\alpha_N(x, t) = \frac{1}{N} \log Z_N(x, t)$$

$$t = \beta, \quad x = 0 \quad \rightarrow \text{CW Model}$$

- $x$  e  $t$  come variabili **spazio e tempo** nel mapping meccanico
- Magnetizzazione generalizzata:

$$\langle m_N \rangle_{x,t} \equiv \frac{1}{Z_N(x, t)} \sum_{\sigma} \left( \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i \right) e^{\left( \frac{t}{N} \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j + x \sum_i \sigma_i \right)}$$



# Analogia meccanica

- Derivate dell'energia libera rispetto ai parametri

$$\frac{\partial \alpha_N(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \langle m_N^2 \rangle_{x,t}$$

$$\frac{\partial \alpha_N(x, t)}{\partial x} = \langle m_N \rangle_{x,t}$$

- Definiamo un potenziale  $V_N(x, t)$  e un'azione  $S_N(x, t)$

$$V_N(x, t) \equiv \frac{1}{2} (\langle m_N^2 \rangle_{x,t} - \langle m_N \rangle_{x,t}^2)$$

$$S_N(x, t) \equiv -\alpha_N(x, t)$$

che soddisfano un'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S_N(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_N(x, t)}{\partial x} \right)^2 + V_N(x, t) = 0$$

# Equazione di Hamilton-Jacobi

- Ricerca di una funzione generatrice di una trasformazione canonica per avere variabili canoniche = costanti del moto  
→ Equazione HJ

$$H\left(\mathbf{x}; \frac{\partial S(\mathbf{x}; t)}{\partial \mathbf{x}}; t\right) + \frac{\partial S(\mathbf{x}; t)}{\partial t} = 0$$

- Nel nostro mapping

$$p(x, t) = \frac{\partial S}{\partial x} = -\langle m_N \rangle_{x,t} \quad (1)$$

$$H_N(x; \partial_x S(x, t); t) = \frac{p^2(x, t)}{2} + V_N(x, t) \quad (2)$$

# Soluzione

- A potenziale nullo ( $V_N(x, t) \equiv 0$ ) la Lagrangiana corrisponde all'energia cinetica (conservata)

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} \langle m_N \rangle_{x,t}^2$$

- e l'equazione del moto alla retta

$$\dot{x}(t) = x_0 - \langle m_N \rangle_{x,t}$$

- La funzione principale di Hamilton è data semplicemente da:

$$\begin{aligned} \bar{S}_N(x, t) &= \bar{S}_N(t_0, x_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}(x, t') dt' \\ &= -\log 2 - \log \cosh(x_0) + \frac{t}{2} \langle m_N \rangle^2 \end{aligned}$$

- avendo preso  $t_0 = 0$  l'interazione scompare in  $Z_N(x, t)$

## Informazioni sul modello CW

Prendendo  $t = \beta$  e  $x = 0$  otteniamo l'energia libera

$$\begin{aligned}\alpha_N(\beta, h) &= -\bar{S}_N(\beta, h) \\ &= \log 2 + \log \cosh(\beta \langle m_N \rangle) - \frac{\beta}{2} \langle m_N \rangle^2\end{aligned}$$

corrispondente all'energia libera del modello fisico se vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\langle m_N^2 \rangle} = \langle m \rangle$$

in accordo con l'assunzione iniziale  $V(t, x) = 0$ .

*A. Barra (2008).*

## Leggi di conservazione

- Derivando ulteriormente HJ si ottengono le equazioni di conservazione per energia e impulso

$$\dot{p} = -p(x, t)\partial_x p(x, t) - \partial_x V_N(x, t) \quad (3)$$

$$\dot{E} = -p(x, t)\partial_x(\partial_t S(x, t)) - \partial_t V_N(x, t) \quad (4)$$

- Da queste si può ottenere

$$\langle m^4 \rangle - \langle m^2 \rangle^2 = O(1/N)$$

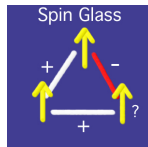
- Nel caso SK otteniamo relazioni di Ghirlanda-Guerra

# Un modello di campo-medio per i vetri di spin

$$H_N(\sigma; J) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Le interazioni  $J_{ij}$  sono  $N(N-1)/2$  variabili casuali normali indipendenti

$$\mathbb{E}[F(J)] = \prod_{i < j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} J_{ij}^2} F(J) dJ_{ij}$$



La funzione di partizione e l'energia libera *quenched*:

$$Z_N(\beta; J) = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N} \exp(-\beta H_N)$$

$$\alpha_N(\beta) = -\beta f_N(\beta) = \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_N(\beta; J)$$

# Molto più complesso del CW

- $T > T_C = 1$  e  $h = 0$ :  $\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N(\beta) = \log 2 + \frac{1}{4}\beta^2$   
 $\rightarrow$  energia libera *annealed*  $\sim \frac{1}{N} \log \mathbb{E} Z_N$
- $T < T_C = 1$ : fase vetrosa
- Parametro d'ordine: distribuzione dell'*overlap* tra repliche  $a, b$

$$\begin{aligned}
 q_{ab} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i^{(a)} \sigma_i^{(b)} \rangle \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \frac{1}{Z_N^2(\beta; J)} \sum_{\sigma^{(a)} \sigma^{(b)}} \sigma_i^{(a)} \sigma_i^{(b)} e^{-\beta H_N(\sigma^{(a)}; J) - \beta H_N(\sigma^{(b)}; J)}
 \end{aligned}$$

# Esempi di distribuzione dell'overlap

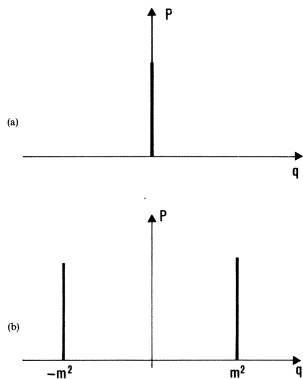


Figure: caso ferromagnetico ad alte (a) e basse (b) temperature

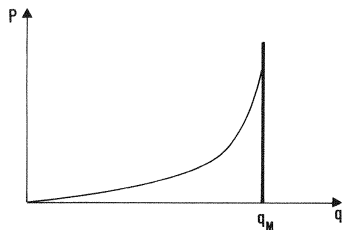


Figure: spin-glass a basse temperature



# Analogia Meccanica per il modello SK

- Funzione di partizione generalizzata

$$\begin{aligned} & \tilde{Z}_N(t, x_1, \dots, x_K) \\ & \equiv \sum_{\sigma} \exp \left( \sqrt{\frac{t}{N}} \sum_{(ij)} J_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_{a=1}^K \sqrt{x_a} \sum_i J_i^a \sigma_i \right) \end{aligned}$$

con  $t$  e i  $K$  parametri  $x_a$  che variano in  $[0, \infty]$

- $t = \beta^2$ ,  $x_a = 0 \rightarrow$  Modello SK
- Numero  $K$  di parametri  $x_a$  legato al numero di step di rottura di simmetria

# Energia cinetica e potenziale

- Azione HJ

$$S(t; x_1, \dots, x_K) = 2\alpha(t; x_1, \dots, x_K) - \sum_{a=1}^K x_a - \frac{1}{2}t$$

- Energia cinetica nel mapping meccanico

$$T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^K (m_{a+1} - m_a) \langle q_{12} \rangle_a^2$$

- Potenziale meccanico  $\sim$  fluttuazioni parametro d'ordine

$$V = \frac{1}{2} \sum_{a=0}^K (m_{a+1} - m_a) (\langle q_{12}^2 \rangle_a - \langle q_{12} \rangle_a^2) + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) \langle q_{12} \rangle_0^2$$

# Soluzione per $V(t, x_1, \dots, x_K) \equiv 0$

- equazione di Hamilton-Jacobi  $\rightarrow$  risolvo a potenziale  $V = 0$
- Nessun parametro spaziale  $\rightarrow$  energia libera annealed
- Un parametro spaziale  $x \rightarrow$  energia libera replica-symmetric
- Due parametri spaziali  $x_1, x_2 \rightarrow$  energia libera 1-RSB

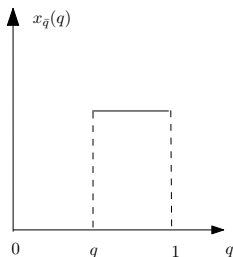


Figure: repliche simmetriche

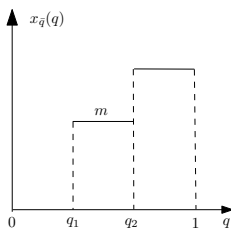


Figure: primo step di rottura della simmetria (1-RSB)

A. Barra, A. Di Biasio, F. Guerra (2011).

# P-spin-glass

- Interazioni tra un numero pari  $p > 2$  di spin

$$H_P = -\sqrt{\frac{p!}{2N^{p-1}}} \sum_{(i_1, \dots, i_p)} J_{i_1, \dots, i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p}$$

- Interessante dal punto di vista dinamico
- Soluzione ad uno step RSB
- Analogia meccanica  $\rightarrow$  basta uno spazio bidimensionale  $(x_1, x_2)$
- Simmetrie  $p, E \rightarrow$  relazioni di Ghirlanda-Guerra

$$\langle q_{12}^P \rangle - 4 \langle q_{12}^{P/2} q_{13}^{P/2} \rangle + 3 \langle q_{12}^{P/2} q_{34}^{P/2} \rangle = 0$$

# Mapping meccanico per il P-spin

$$S(t; x_1, \dots, x_K) = 2\tilde{\alpha}(t; x_1, \dots, x_K) - \sum_{a=1}^K x_a \left( \frac{p}{2} Q_a^{p-2}(\beta) \right)^{1/2} \\ - \frac{t}{2} \left[ 1 + \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \sum_{a=1}^K (m_{a+1} - m_a) Q_a^p(\beta) \right]$$

$$T(t; x_1, \dots, x_K) = \frac{p}{4} \sum_{a=1}^K (m_{a+1} - m_a) \langle q_{\sigma\sigma'} \rangle_a^2 Q_a^{p-2}(\beta)$$

$$V(t; x_1, \dots, x_K) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^K (m_{a+1} - m_a) \{ \langle q_{\sigma\sigma'}^p \rangle_a - Q_a^p(\beta) \\ + \frac{p}{2} [ Q_a^p(\beta) - \langle q_{\sigma\sigma'} \rangle_a^2 Q_a^{p-2}(\beta) ] \}$$

# Conclusioni

- Utilizzando funzioni di partizione interpolanti otteniamo informazioni su modelli fisici di sistemi disordinati
- Tecniche utili per avere un punto di vista diverso e per uno studio rigoroso dei sistemi disordinati (limite termodinamico, energia libera di Parisi,...)
- Possibilità di costruire un'interessante analogia meccanica (equazione di Hamilton-Jacobi)
- Soluzione relativamente facile ed elegante
- Leggi di conservazione meccaniche connesse alle GG

Grazie!